

Exercice 1

Donner la valeur de vérité des propositions suivantes:

$$(P_1): \exists x \in \mathbb{N} / x^2 = 25$$

$$(P_2): (\forall x \in \mathbb{R}); (\exists y \in \mathbb{R}) / x \leq y$$

$$(P_3): (\exists x \in \mathbb{R}); (\forall y \in \mathbb{R}) / x \leq y$$

$$(P_4): (\exists x \in \mathbb{R}) / x^2 - 3x + 2 \geq 0$$

Exercice 2

Nier puis donner la valeur de vérité de chacune des propositions suivantes :

$$(P_1): \forall x \in [0; +\infty[; \sqrt{x} < x$$

$$(P_2): \exists x \in \mathbb{R}; \forall y \in \mathbb{R} : x + y > 0$$

$$(P_3): \forall x \in \mathbb{R} : x^2 - x - 2 \geq 0$$

$$(P_4): \forall x \in \mathbb{R} : x \leq 0 \text{ ou } x \geq 0$$

Exercice 3

(Raisonnement par disjonction des cas)

$$1) \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'équation suivante : } x^2 - |x - 2| + 5 = 0$$

$$2) \text{ Résoudre dans } \mathbb{R} \text{ l'inéquation suivante: } |2x - 1| + |2x + 1| \geq 4$$

$$3) \text{ Montrer que le nombre } A = n(n^2 + 5) \text{ est pair pour tout } n \text{ de } \mathbb{N}.$$

Exercice 4 (Raisonnement par déduction)

Montrer que :

$$1) (\forall x > 1); (\forall y > 1): \frac{\sqrt{x}}{x+1} = \frac{\sqrt{y}}{y+1} \Rightarrow x = y$$

$$2) ac \leq 0 \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R}) / ax^2 + bx + c = 0$$

$$3) (\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2): 1 + xy = x + y \Rightarrow (x = 1 \text{ ou } y = 1)$$

Exercice 5 (Raisonnement par l'absurde)

$$\text{Montrer que: } \forall x \in [0; 1]: \sqrt{x} \geq x$$

$$2 \text{ Montrer que: } \forall x \in \mathbb{R}^+ : \sqrt{1+x} \leq 1 + \frac{x}{2}$$

Exercice 6 (Raisonnement par récurrence)

Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}): 2^n \geq n+1$

Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}): 4^n \geq n^2$:

Montrer que: 5 divise le nombre $6^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$

Exercice 7 (Raisonnement par contre-exemple)

1) Donner la valeur de vérité de la proposition suivante:

« Tous les nombres premiers sont impairs »

2) Montrer que les propositions suivantes sont fausses:

$(P_1): (\forall x \in \mathbb{R}); x^2 > 0$

$(P_2): (\forall m \in \mathbb{N}); m^2 \text{ est impair}$

$(P_3): (\forall n \in \mathbb{N}); n^2 + n + 1 \text{ est premier}$

Exercice 8

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation: $|x^2 - 4x| - x^2 > 0$

2) Montrer que: $3x^2 + x = 3y^2 + y \Rightarrow x = y$

3) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); \cos(n\pi) = (-1)^n$

4) Montrer que: $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2): |x + y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2 + xy}$

5) Soient $x; y; z$ et t des réels tels que: $x + y + z > t$

Montrer que: $x > \frac{t}{3}$ ou $y > \frac{t}{3}$ ou $z > \frac{t}{3}$

Exercice 9 (Raisonnement par contraposé)

1) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}); n^2 \text{ est pair} \Rightarrow n \text{ est pair}$

2) Soit $x \in \mathbb{R}$; montrer que: $x^2 + x - 2 \leq 0 \Rightarrow x \leq 1$

3) Montrer que:

a) $x \neq y \Rightarrow (x+1)(y-1) \neq (x-1)(y+1)$

b) $(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2): x \neq y \Rightarrow (x^3 + x) \neq (y^3 + y)$

c) $(xy \neq 1 \text{ et } x \neq y) \Rightarrow \frac{x}{x^2 + x + 1} \neq \frac{y}{y^2 + y + 1}$