Exercice 1

Soit f la fonction numérique définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

Et $\left(C_f\right)$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

1) Etudier les branches infinies de la courbe $\left(C_f\right)$ en $+\infty$

2) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat

3) Montrer que : $\forall x\geq 0$; $f'(x)=2\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$

4) Etudier le signe de $f'(x)$ et construire tableau de variation de f.

5) Montrer que : $\forall x>0$; $f''(x)=\dfrac{2\sqrt{x}-3}{\sqrt{x}}$

6) Dresser le tableau de convexité de f et déduire le point d'inflexion de $\left(C_f\right)$

7) Déterminer les points d'intersection de $\left(C_f\right)$ avec les axes du repère.

8) Construire $\left(C_f\right)$ dans le repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$

9) Soit h la Restriction de f sur l'intervalle $I=[4;+\infty[$

   a) Montrer que h admet une fonction Réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à Déterminer.

   b) Construire la courbe $\left(C_{h^{-1}}\right)$

Exercice 2

Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0=-1 \\ u_{n+1}=-\dfrac{3u_n+8}{2u_n+5} \end{cases}$; $\forall n\in\mathbb{N}$

1) Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}$; $-2<u_n\leq -1$

2) Etudier la variation de (u_n).

3) Montrer que (u_n) convergente et calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$

4) Montrer que $\frac{1}{2+u_{n+1}} = \frac{1}{2+u_n} + 2$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Exprimer u_n en fonction de n et retrouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$

Exercice 3

I. Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3+x^2}$

1) Etudier la variation de f sur $\mathbb{R}^+$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = x$

3) Montre que : $\forall x \in [0;1[\, ; f(x) > x$

II. Soit (u_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad ; \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} ; 0 < u_n \leq 1$

2) Montrer que (u_n) est strictement croissante

3) Montrer que (u_n) est convergente et calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$

III. Soit (v_n) une suite numérique définie par : $\forall n \in \mathbb{N} ; v_n = u_n^2 - 1$

1) Montrer que (v_n) est une suite géométrique et déterminé sa raison et v_0 son premier terme.

2) Exprimer v_n en fonction de n et déduire L'expression de u_n

3) Retrouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$