guessmaths

Devoir Surveillé n° 5 **2éme Bac SM Biof**

1ér Semestre Durée 3h

Exercice 1

Soit $n \in \mathbb{N}$; on pose : $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n(t)\,dt$ et $J_n = \int_0^{\sqrt{n}} e^{-t^2}\,dt$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a :

(i): $I_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} \times I_n$

(ii), $(n+1) \times I_{n+1} \times I_n = \frac{\pi}{2}$

(iii): $\frac{n+1}{n+2} \leq \frac{I_{n+1}}{I_n} \leq 1$

2) Montrer que la suite $\left(\sqrt{n} \times I_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente ; puis calculer sa limite

3) En utilisant l'inégalité : $\forall x \in]-1;+\infty[; \ln(1+x) \leq x$; montrer que :

$(\forall u \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{N}^*); u \geq -n \Rightarrow \left(1+\frac{u}{n}\right)^n \leq e^{-u}$

4) Déduire que : $\left(\forall t \in \left[0;\sqrt{n}\right[\right); \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \leq e^{-t^2} \leq \left(1+\frac{t^2}{n}\right)^{-n}$

5) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*)$; $\sqrt{n} \times I_{2n+1} \leq J_n \leq \sqrt{n} \times I_{2n-2}$; puis déduire que la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est convergente puis déterminer sa limite.

Exercice 2

Partie I

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)$ et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (unité de mesure 1cm)

1) Vérifier que : $D_f = \mathbb{R}$; puis montrer que f est une fonction impaire.

2) Etudier les branches infinies de (C_f) au voisinage de $+\infty$.

3) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que : $(\forall x \in \mathbb{R})$

4) Dresser le tableau de variation de f puis étudier le concavité de (C_f).

5) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$; puis construire la courbe (C_f) et (C^{-1}) celle de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

6) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes (C_f) ; (C^{-1}) et les droites d'équation, $x = 0$ et $x = 4$.

7) Calculer le volume du solide engendre par la rotation de (C_f) au tour de l'axe des abscisses en un tour complet sur l'intervalle $[0;1]$.

WWW.GUESSMATHS.CO

Partie II

Soient $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *et* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *deux suites définies par :* $U_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$ *et* $V_n=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{1}{n+k}\right)$ *;* $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$

1) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente et que sa limite est* $\ln 2$.

2) Montrer que : $(\forall t\in\mathbb{R}_+^*)$ *;* $1-\frac{1}{t^2}\le f'(t)\le 1$ *; puis déduire que :* $(\forall t\in\mathbb{R}_+^*)$*;* $t-\frac{1}{6}t^3\le f(t)\le t$

3) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$*;* $U_n\left(1-\frac{1}{6n^2}\right)\le V_n\le U_n$ *; puis déduire la limite de la suite* $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$

Partie III

Soit F la fonction définie par :
$$\begin{cases} F(x)=\int_x^{2x}\frac{f(t)}{t^2}dt \quad ; \quad si \quad x\neq 0 \\ F(0)=\ln 2 \end{cases}$$

1) Vérifier que $D_f=\mathbb{R}$ *; puis montrer que F est une fonction paire.*

2) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$*;* $-\frac{1}{4}x^2+\ln 2\le F(x)\le \ln 2$

3) Etudier le continuité puis la dérivabilité de F en $x_0=0$.

4) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ *;* $\frac{f(x)}{2x}\le F(x)\le\frac{f(2x)}{2x}$

5) Déduire la nature de la branche infinie de (C_F) *au voisinage de* $+\infty$.

6) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}$ *; et que :* $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ *;* $F'(x)=\frac{f(2x)-2f(x)}{2x^2}$

7) Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$ *;* $f(2x)-2f(x)<0$

(on pourra utiliser la monotonie de f'*).*

8) Construire (C_F) *dans un repère orthonormé.*

WWW.GUESSMATHS.CO