Série n°15 «Ensembles et Applications» 1er Bac SM

Exercice 1

A ;B ;C sont des parties d'un ensemble E .
Montrer les équivalences suivantes :

1) $A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$
2) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A = (A \cup B) \setminus B$
3) $A \cup B = A \setminus B \Leftrightarrow B = \varnothing$
4) $A \cap B = A \setminus B \Leftrightarrow A = \varnothing$
5) $A \subset B \subset C \Leftrightarrow A \cup B = A \cap B$

Exercice 2

A, B , C sont des parties d'un ensemble E .
Peut-on comparer A et B dans chacun des cas suivants sachant que :

- $A \cap B = A$
- $A \cup B = B$
- $A \cup B = A \cap B$
- $A \cup B \subset A \cap B$
- $\bar{A} \cup B = E$
- $A \cap \bar{B} = \varnothing$

Exercice 3

A, B sont des parties d'un ensemble E .
Montrer que :

- $\left(\overline{A \cup B}\right) \cap \left(\overline{B \cup \bar{A}}\right) = \varnothing$
- $\left(\overline{A \cap B}\right) \cup \left(\overline{B \cap \bar{A}}\right) = \varnothing$

Exercice 4

A, B sont des parties d'un ensemble E . Simplifier les écritures suivantes :

- $Y = (A \cup B) \cup (A \cup C)$
- $X = (A \cap B) \cap (A \cap C)$
- $Z = (\bar{A} \cup \bar{B}) \cap (\bar{A} \cup B)$
- $E = (A \cup B) \cap (A \cup \bar{B})$

Exercice 5

A, B sont des parties d'un ensemble E.
1) Représenter à l'aide d'un diagramme de Venn : $A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
2) Ecrire les ensembles $A \setminus B$; $B \setminus A$ et $A \Delta B$, sous forme de réunion ou intersection uniquement.
3) Démontrer que : $A \Delta B = (A \cup B) \cap (\bar{A} \cup \bar{B})$.
4) Démontrer que : $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (B \cap A)$.
5) Montrer que Δ est une opération commutative.
6) Déterminer : $A \Delta \varnothing$ et $A \Delta A$
7) Comparer les ensembles suivants : $X = \overline{A \Delta B}$; $Y = A \Delta \bar{B}$ et $Z = \bar{A} \Delta B$.

Exercice 6

E et deux ensembles non vides, A est une partie de E et B et C deux parties de F.
Montrer que : $E \times (A \cup C) = (E \times B) \cup (E \times C)$

Exercice 7

On considère les deux ensembles suivants : $A = \{1;2\}$ et $B = \{2;3\}$.
1) Déterminer $P(A)$; $P(B)$; $P(A \cap B)$; $P(A \cup B)$ et $P(A \Delta B)$.
2) Comparer les ensembles : $P(A) \cap P(B)$ et $P(A \cap B)$.

3) Comparer les ensembles : $P(A)\cup P(B)$ et $P(A\cup B)$.

4) Comparer les ensembles : $P(A)\Delta P(B)$ et $P(A\Delta B)$.

Exercice 8

On considéré les ensembles : $E=\{x\in \mathbb{N} / x=2k \text{ où } k\in \mathbb{N}\}$;
$F=\{x\in \mathbb{N} / x=3k \text{ où } k\in \mathbb{N}\}$ et $G=\{x\in \mathbb{N} / x=6k \text{ où } k\in \mathbb{N}\}$

1) Montrer que: $G\subset E$ et $G\subset F$.

2) Montrer que : $E\cap F=G$

3) Ecrire en compréhension l'ensemble C_F^G .

Exercice 9

Soit m un réel strictement positif.

On considère les ensembles : $E=\left\{x\in \mathbb{R} / |x-1|<\frac{3}{2}\right\}$ et $F=\{x\in \mathbb{R} / |x+1|<m\}$

1) Montrer que : $E\neq\varnothing$

2) Déterminer les valeurs de m pour que : $E\cap F=\varnothing$.

Exercice 10

On considère l'ensemble: $A_m=\{x\in \mathbb{R} / |x-2|<m\}$ où m est un paramètre réel.

1) Déterminer les valeurs de m tel que : $A_m\subset]1;5[$.

2) Déterminer les valeurs de m tels que : $A_m\cap]1;5[=\varnothing$.

Exercice 11

Ecrire en extension l'ensemble E définie par : $E=\{(x;y)\in \mathbb{Z}^2 \ / \ x^2+xy-2y^2=-5\}$.

Exercice 12

Soient a et b deux réels tels que : $0<a<b$.
On pose: $I=[a;b]$ et $J=[1-b;1-a]$.

1) Montrer que : $I\cap J=\varnothing \Leftrightarrow \left(a>\frac{1}{2} \text{ ou } b<\frac{1}{2}\right)$

2) Déterminer les conditions sur a et b pour que : $I\cap J=\varnothing$.

3) Montrer que

a) $a+b=1 \Rightarrow I\cap J=I=J$

b) $a+b<1 \Rightarrow I\cap J=[1-b;b]$

c) $a+b>1 \Rightarrow I\cap J=[a;1-a]$.

4) Déterminer $I\cap J$ dans chacun des les suivants :

i) $a=\frac{1}{2}$ ii) $b=\frac{1}{2}$