Examen Nat Sc Eco 2013 Session de rattrapage
Sujet de maths

Exercice 1(5 pts)

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = \dfrac{-8}{U_n - 6} \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

1- Calculer U_1 et U_2

2- On pose : $V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n - 4}$; pour tout $n \in IN$.

a) Calculer V_0 ; puis montrer que $(V_n)_{n\in IN}$ est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$.

b) Calculer V_n en fonction de n.

c) Montrer que : $U_n = \dfrac{4V_n - 2}{V_n - 1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) Déduire que: $U_n = \dfrac{4\left(\frac{1}{2}\right)^n + 2}{\left(\frac{1}{2}\right)^n + 1}$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

e) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$

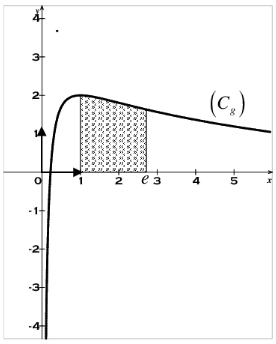
Exercice 2 : (3 pts)

1- Vérifier que pour tout $x \in IR^*$: $3 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{3x-1}{x}$; puis calculer l'intégrale : $I = \int_1^e \dfrac{3x-1}{x}\,dx$.

2- a) En utilisant une intégration par parties calculer : $J = \int_1^e \ln x\, dx$.

b) Dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ (C_g) est la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0;6[$ par : $g(x) = \dfrac{3x-1}{x} - \ln x$.

3- En utilisant les résultats de la question 1-calculer l'aire de la partie hachurée dans la figure ci-dessous.



Exercice 3: (8 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = (x\ln x)^2 + 3x^2 - 3$.

1- a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -3$.

2- a) Pour tout x de $]0;+\infty[$; calculer $f'(x)$; puis montrer que : $f'(x)=2x\left(\left(\frac{1}{2}+\ln x\right)^2+\frac{11}{4}\right)$.

b) Déduire le signe de $f'(x)$ sur $]0;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f sur $]0;+\infty[$.

d) Calculer $f(1)$; puis déduire de ce qui précède le signe de $f(x)$ sur $]0;+\infty[$.

Exercice 4 : (4 pts) (Donner tous les résultats sous forme de fractions)

Un Sac contient sept boules (indiscernables au toucher): trois (3) boules portent le numéro 5 ; deux (2) boules portent le numéro 4 et deux (2) boules portent le numéro 3.

On tire de façon aléatoire simultanément deux boules.
On considère les événements A et B :
A «Les deux boules tirées porte chacune un numéro impair »
B «Les deux boules tirées portent des numéros dont la somme est supérieure ou égale à 9 »

1- a) Déterminer le nombre de tirages possibles.
   b) Calculer : $P(A)$

2- Montrer que : $P(B)=\frac{3}{7}$.

3- Sachant que l'événement B est réalisé calculer la probabilité de tirer deux boules qui porte chacune un numéro impair.

4- Les événements A et B sont-ils indépendants ? justifier votre réponse..