EXERCICE 1:

On définit la fonction f sur l'intervalle $\left[0;\pi^2\right]$ *par:* $f(x)=\cos\sqrt{x}$.

1\. a) *Vérifier que pour tout réel* $x\in\left[0;\pi^2\right]$, $f(x)-1=-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$.

b) *Démontrer que f est dérivable en 0 et donner* $f'(0)$.

2\. a) *Justifier que f est dérivable sur* $\left]0;\pi^2\right]$ *et calculer* $f'(x)$.

b) *Etudier le sens de variation de la fonction f et dresser son tableau de variation.*

3\. a) *Résoudre dans* $\left[0;\pi^2\right]$ *l 'équation:* $f(x)=0$

b) *Déterminer une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse* $\frac{\pi^2}{4}$.

CORRECTION :

$f(x)=\cos\sqrt{x}$; $\forall x\in\left[0;\pi^2\right]$

1\. a) *Pour tout réel* $\forall x\in\left[0;\pi^2\right]$:

$$\begin{aligned} f(x)&=\cos\sqrt{x}\\ &=\cos\left(2\times\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\\ &=1-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\end{aligned}$$

Donc : $f(x)=1-2\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)$

On a utiliser $\left\langle\begin{aligned}\cos(2a)&=\cos^2a-\sin^2a\\&=1-2\sin^2a\\&=\cos^2a-1\end{aligned}\right.$

b) $$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\cos\left(\sqrt{x}\right)-1}{x}$$

$$=\lim_{x\to0^+}-\frac{1}{2}\times\frac{\sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)}{\left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}$$

f est dérivable a droite en 0 et on $f'(0)=-\frac{1}{2}$

2\. a) *f est la composée des fonctions cosinus et racine carrée*

Soit $u : x \mapsto \sqrt{x}$; $\forall x \in [0;\pi^2]$

■ *u est dérivable sur* $]0;\pi^2]$

■ $u(]0;\pi^2]) =]0;\pi]$

La fonction Cosinus est dérivable sur IR en particulier sur $]0;\pi]$

Donc f est dérivable sur $]0;\pi^2]$ *(c'est la composée de deux fonctions dérivables) et on a:*

$$\forall x \in [0;\pi^2] \quad f'(x) = u'(x) \times (-\sin(u(x)))$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{x}} \times (-\sin\sqrt{x})$$

$$= \frac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

Ainsi $\forall x \in [0;\pi^2] \quad f'(x) = \begin{cases} \dfrac{-\sin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} & si\ x \in]0;\pi^2] \\ -\dfrac{1}{2} & si\ x = 0 \end{cases}$

b) Si $x \in]0;\pi^2]$ *alors* $0 < \sqrt{x} < \pi$ *; donc :* $\sin\sqrt{x} \geq 0$ *d'où* $f'(x) \leq 0$

<u>*Tableau de variation de f*</u>

x	0		π^2
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	-	0
$f(x)$	1	↘	-1

3. a) $f(x) = 0 \Leftrightarrow \cos\sqrt{x} = 0$ *et* $\sqrt{x} \in [0;\pi]$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x} = \frac{\pi}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi^2}{4}$$

b) Soit (T) *la tangente à la courbe de f au point d'abscisse* $\frac{\pi^2}{4}$

$$(T) : y = f'\left(\frac{\pi^2}{4}\right)\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right) + f\left(\frac{\pi^2}{4}\right)$$

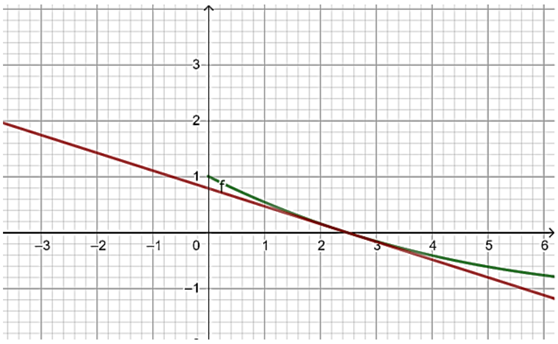
$$= -\frac{1}{\pi}\left(x - \frac{\pi^2}{4}\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}x + \frac{\pi}{4}$$

D'où : $(T) : y = -\frac{1}{\pi}x + \frac{\pi}{4}$

<u>Remarque:</u>

La courbe de f est donnée ci-dessous n'est pas demandée mais peut nous donner une idée sur le travail qu'on a fait.



EXERCICE 2

Calculer la limite en 0 de la fonction suivante : $\varphi(x) = xE\left(\frac{1}{x}\right)$

CORRECTION **:**

Pour la fonction φ *il faut encadrer la fonction partie entière* $x \mapsto E\left(\frac{1}{x}\right)$ *. On rappelle que si* $y \in \mathbb{R}$ *, alors la partie entière de y satisfait* $E(y) \leq y < E(y)+1$ *. Ce qui donne* $y-1 < E(y) \leq y$ *. Donc pour tout* $y \in \mathbb{R}$ *tel que* $x \neq 0$ *on a :* $\frac{1}{x} - 1 < E\left(\frac{1}{x}\right) \leq \frac{1}{x}$

Nous allons calculer les limites à droite est à gauche de 0.

Soit $x > 0$ *.*

Par multiplication par x dans l'inégalité en haut, on a : $1 - x < \varphi(x) \leq 1$.

D'où la fonction φ *est encadrer par deux fonctions (* $x \mapsto 1-x$ *et la fonction constante égale à 1) qui tendent vers 1 quand* $x \to 0^+$ *.*

Alors : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = 1$

De même si $x < 0$ *, on a :* $1 < \varphi(x) \leq 1 - x$ *.*

Et donc : $\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) = 1$

Comme : $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) = 1$

Alors : $\lim\limits_{x \to 0} \varphi(x) = 1$.

EXERCICE 3

Montrer que la fonctions suivante est prolongeable par continuité sur tout $\mathbb{R}$ *et* $[0;+\infty[$ *, respectivement:*

$f(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

CORRECTION **:**

Tout d'abord on rappelle que si une fonction u est définie sur I sauf en un point $x_0 \in I$ *, alors pour la prolongée en* x_0 *il faut s'assuré de deux choses: la continuité de u sur* $I - \{x_0\}$ *et l'existence de la limite* $\ell \in \mathbb{R}$ *de* $u(x)$ *quand* $x \to x_0$*. Dans ce cas on peut définir une fonction u continue sur tout II telle que*

$$u(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in I - \{x_0\} \\ \ell & \text{si } x = x_0 \end{cases}.$$

La fonction u s'appelle le prolongement continu de u sur I.

La fonction $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ est définie et continue sur $\mathbb{R}-\{0\}$ (dans ce cas on a $I=\mathbb{R}$ et $x_0=0$).

Pour que f soit prolongeable sur $\mathbb{R}$ il faut qu'elle admet une limite en 0.

En effet, comme $|\sin(y)|\leq 1$ pour tout $y\in\mathbb{R}$,alors en passant à la valeur absolue de f, on a pour tout $x\in\mathbb{R}^*$: $|f(x)|\leq|x|$.

Donc $-|x|\leq f(x)\leq|x|$ et comme $\lim\limits_{x\to 0}|x|=0$, alors $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$. Ainsi f est prolongeable sur $\mathbb{R}$ et son prolongement f est donné par : $f(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x\neq 0 \\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.

EXERCICE 4

Montrer que pour tout $x>0$ on a : $\arctan(x)>\frac{x^2}{1+x^2}$.

CORRECTION :

Soit la fonction $f:]0;+\infty[\to\mathbb{R}$ définie par : $f(x)=\arctan(x)-\frac{x^2}{1+x^2}$; $x>0$.

Cette fonction est dérivable sur $]0;+\infty[$ car c'est le quotient et la somme des fonctions dérivables sur $]0;+\infty[$.

De plus on a pour tout $x>0$.

$$\begin{aligned} f'(x)&=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x(1+x^2)-x^2(2x)}{(1+x^2)^2}\\ &=\frac{1}{1+x^2}-\frac{2x}{(1+x^2)^2}\\ &=\frac{1}{1+x^2}\times\frac{(x-1)^2}{(1+x^2)^2}.\end{aligned}$$

Ce qui montre que $f'(x)>0$ pour tout $x>0$. Ainsi f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. Donc :

$x>0\Rightarrow f(x)>f(0)$

ce qu'il fallait démontrer

EXERCICE 5

Soit $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ la fonction définie par : $g(x)=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{x} & si\ \ x\neq 0\\ 1 & si\ \ x=0\end{cases}$

1− Montrer que : $(\forall x\in\mathbb{R}_+^*)$; $x-\frac{x^3}{6}\leq\sin x\leq x$.

2− Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et donner l'expression de sa fonction dérivée sur $\mathbb{R}^*$.

3−Etudier la dérivabilité de g en 0 .

4− Montrer que la fonction g' est continue sur $\mathbb{R}$.

CORRECTION :

1− ■ Soit la fonction h définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $h(x)=\sin x-x$.

H est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x\in\mathbb{R}$: $h'(x)=\cos x-1$.

D'où : $\left(\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]\right)$: $h'(x)\leq 0$.

Donc : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)/\ h(0)\leq \sin x - x \Rightarrow \sin x\leq x$ (car $h(0)=0$)

Pour $x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$; on remarque que h est impaire ; donc :

$$h(0)\leq \sin(-x)-x \Rightarrow 0\leq \sin(-x)-x$$
$$\Rightarrow x\leq \sin x$$

■ Soit la fonction ψ définie sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ par : $\psi(x)=\sin x - x+\frac{x^3}{6}$

ψ est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ est $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

on a : $\psi'(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}$.

Etudions le signe de ψ' :

la fonction ψ' est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;

on a : $\psi''(x)=-\sin x+x$ et d'après ce qui précède on a : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$; $\sin x\leq x$.

Donc ψ' est croissante sur $\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ et comme elle est paire alors ψ' est décroissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};0\right]$

D'où $\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$; $\psi'(x)\geq\psi'(0)\Rightarrow\psi'(x)\geq 0$ (car $\psi'(0)=0$).

Par suite ψ est croissante sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$;d'où : $\left(\forall x\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]\right)$;

$$\psi(x)\geq\psi(0)\Rightarrow \sin x - x+\frac{x^3}{6}\geq 0$$
$$\Rightarrow -x+\frac{x^3}{6}\leq \sin x$$

Et $\left(\forall x\in\left[-\frac{\pi}{2};0\right]\right)$; $\psi(x)\leq\psi(0)\Rightarrow \sin x - x+\frac{x^3}{6}\leq 0$

$$\Rightarrow \sin x\leq -x+\frac{x^3}{6}$$

2− La fonction $x\mapsto\frac{\sin(x)}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de deux fonctions dérivables.

De plus pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ on a : $g'(x)=\frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$.

3- D'autre part, pour tout $x\neq 0$ on a :

$$\frac{g(x)-g(0)}{x-0}=\frac{\frac{\sin(x)}{x}-1}{x}$$
$$=\frac{\sin(x)-x}{x^2}$$

On sait que (d'après la question 1)) que : $(x\in\mathbb{R}^*)$; $x-\frac{x^3}{6}\leq \sin x\leq x$

Donc : $-\frac{x}{6} \leq \frac{\sin(x)-x}{x^2} \leq 0$.

D'où : $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0$

Et à gauche de 0 on posera : $t=-x$ *; donc :* $t-\frac{t^3}{6} \leq \sin t \leq t \Rightarrow (-t)+\frac{t^3}{6} \geq -\sin t \geq (-t)$

$$\Rightarrow (-t)+\frac{t^3}{6} \geq \sin(-t) \geq (-t)$$

$$\Rightarrow x+\frac{x^3}{6} \geq \sin x \geq x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{6} \geq \frac{\sin x - x}{x^2} \geq 0$$

$$\Rightarrow 0 \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq \frac{x}{6}$$

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{\sin(t)-t}{t^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0$$

Donc g est dérivable en 0 *et* $g'(0)=0$.

Donc la fonction dérivée g' *est donnée par :*

$$g'(x)=\begin{cases} \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} & si\ x\neq 0 \\ 0 & si\ x=0 \end{cases}$$

4− Comme la fonction $x \mapsto \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2}$ *est continue sur* $\mathbb{R}^*$ *(car c'est le quotient de deux fonctions continues), alors la fonction dérivée* g' *est continue sur* $\mathbb{R}^*$.

Maintenant étudions la continuité de g' *au point 0. Pour tout réel* $x\neq 0$, *on a :*

$$\begin{aligned} g'(x) &= \frac{x\cos(x)-\sin(x)}{x^2} \\ &= \frac{x\cos(x)-x-\sin(x)+x}{x^2} \\ &= \frac{x\cos(x)-x}{x^2} - \frac{\sin(x)-x}{x^2} \\ &= x\times\frac{\cos(x)-1}{x^2} - \frac{\sin(x)-x}{x^2} \end{aligned}.$$

Or : $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)-x}{x^2} = 0$ *; d'après ce qui précède et* $\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x^2} = -\frac{1}{2}$.

Donc : $\lim_{x\to 0} g'(x) = 0$ *et* $g'(x)=0$

Ce qui implique que g' *est aussi continue en 0, donc sur* $\mathbb{R}$