Problème

On considère la fonction f définie par : $f(x)=2\arctan\left(\dfrac{2\sqrt{x}}{x+1}\right)$

et (C_f) *sa courbe représentative dans un repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1) a) Déterminer D_f *le domaine de définition de f ; puis calculer* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que : $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ *et donner une interprétation géométrique à ce résultat.*

2) Calculer $f'(x)$ *pour tout* $x\in D_f$ *; puis dresser le tableau de variation de f.*

3) Construire (C_f) *dans le repère orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

4) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de I vers un intervalle J à déterminer.

b) Déterminer $g^{-1}(x)$ *pour tout* $x\in J$ *; puis construire* $\left(C_{g^{-1}}\right)$ *la courbe* g^{-1} *dans le même repère* $(O;\vec{i};\vec{j})$

5) Montrer que l'équation $g(x)=x$ *admet une unique solution* α *dans l'intervalle* $]1;2[$.

6) On considère la suite (u_n) *définie par :* $\begin{cases} u_0=1 \\ u_{n+1}=g(u_n) \quad ;(\forall n\in \mathbb{N}) \end{cases}$

a) Montrer que : $1\le g(2)\le 2$.

b) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $1\le u_n\le 2$

c) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$ *;* $|u_{n+1}-\alpha|\le\dfrac{1}{4}|u_n-\alpha|$

d) Montrer que la suite (u_n) *est convergente et calculer sa limite.*

www.guessmaths.co E-mail : abdelaliguessouma@gmail.com whatsapp : 0604488896