Cours Suites Terminale S

1.1 Rappels sur les suites Variations d'une suite

* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à partir du rang n_0 si et seulement si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \geq u_n$.

* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante à partir du rang n_0 si et seulement si, pour tout $n \geq n_0$, $u_{n+1} \leq u_n$.

* Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite monotone si elle est croissante ou décroissante.

Etude du sens de variation d'une suite

* Etude du signe de $u_{n+1} - u_n$.

* $u_n = f(n)$, si f est monotone sur $[0;+\infty[$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone, de même variation que f (formule explicite).

* Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement positive, on peut comparer $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ et 1.

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.

Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement décroissante.

Suites majorées, minorées, bornées...

* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée s'il existe un réel M tel que pour tout entier n, $u_n \leq M$.

* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée s'il existe un réel m tel que pour tout entier n, $u_n \geq m$.

* La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée si elle est à la fois majorée et minorée.

1.2 Suites arithmétiques et suites géométriques

Suites arithmétiques

$*$ *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est arithmétique s'il existe un réel r (la raison) indépendant de n tel que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=u_n+r$.

$*$ *Pour tous entiers n et p,* $u_n=u_p+(n-p)\times r$.

$*$ $u_n=u_0+n\times r$.

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n=\begin{cases}+\infty & si\ r>0\\ -\infty & si\ r<0\end{cases}$

$*$ *Somme de termes consécutifs :* $(\text{nombre de termes})\times\dfrac{(1^{er}\ \text{termes}+\text{dernier terme})}{2}$

2 Exemple :

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n\times(n+1)}{2}$$

Suites géométriques

$*$ *Une suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est géométrique s'il existe un réel q (la raison) indépendant de n tel que, pour tout* $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=q\times u_n$.

$*$ *Pour tous entiers n et p,* $u_n=u_p\times q^{n-p}$.

$*$ $u_n=u_0\times q^n$.

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n=\begin{cases}+\infty & si\ q>1\\ 0 & si\ -1<q<1\end{cases}$

$*$ *Somme de termes consécutifs :* $(1^{er}\ \text{termes})\times\dfrac{1-q^{\text{nombre de termes}}}{1-q}$

Exemple : $1+q^1+q^2+\cdots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$

Attention : $\text{nombre de termes}=n+1-\text{le rang du }1^{er}\ \text{terme}$

1.3 Démonstration par récurrence

Démonstration par récurrence

Pour démontrer que pour tout entier $n \geq n_0$, P_n (proposition qui dépend de n) est vraie, il faut :

$*$ **Initialisation** *: vérifier que P_{n_0} est vraie pour n_0.*

$*$ **Hypothèse de récurrence** *: supposer que P_k est vraie pour un certain entier $k \geq n_0$.*

$*$ **Propriété d'hérédité** *: démontrer que P_{k+1} est vraie.*

$*$ **Conclusion** *: pour tout $n \geq n_0$, P_n est vraie.*

1.4 Limite d'une suite Limites d'une suite numérique $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$*$ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel ℓ. Ceci signifie que tout intervalle contenant ℓ contient aussi tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p.* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

$(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est convergente et converge vers ℓ.*

$*$ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $+\infty$. Cela signifie que tout intervalle ouvert $]A;+\infty[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p. La suite est divergente.*

$*$ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a pour limite $-\infty$. Ceci signifie que tout intervalle ouvert $]-\infty;B[$ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang p. La suite est divergente.*

$*$ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'admet aucune limite. La suite est divergente.*

Suites monotones

$*$ *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et non majorée, alors :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

$*$ *Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et non minorée, alors :* $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

$*$ *Une suite croissante et majorée est convergente.*

$*$ *Une suite décroissante et minorée est convergente.*

limite d'une suite croissante non majorée

$*$ *La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas majorée : quelque soit le réel A, on peut trouver un entier p tel* que $u_p \geq A$.

$\ast$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. Pour tout $n \geq p$: $\begin{cases} u_n \geq u_p \\ u_n > A \end{cases}$.

$\ast$ A partir du rang p, tous les termes de la suite sont dans $]A;+\infty[$.

$\ast$ **Conclusion** : par définition, cela prouve : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$

limite d'une suite décroissante non minorée

$\ast$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas minorée : quelque soit le réel B, on peut trouver un entier p tel que $u_p \leq B$

$\ast$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Pour tout $n \geq p$: $\begin{cases} u_n \leq u_p \\ u_n < B \end{cases}$.

$\ast$ A partir du rang p, tous les termes de la suite sont dans $]-\infty;B[$.

$\ast$ **Conclusion** : par définition, cela prouve : $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$

limite d'une suite croissante et majorée

$\ast$ Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, croissante et majorée par un réel M. Notons A, le plus petit des majorants.

$\ast$ Tout intervalle $]A-\alpha;A+\alpha[$ contient au moins un terme u_p de la suite. Sinon, $A-\alpha$ serait un majorant de la suite, ce qui contredit le fait que A soit le plus petit des majorants.

$\ast$ La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante : pour tout $n \geq p$, $u_n \geq u_p$.

$\ast$ **Conclusion**: l'intervalle $]A-\alpha;A+\alpha[$ contient tous les termes de la suite à partir du rang p. Ceci est vrai, quel que soit le réel $\alpha > 0$.

Par définition, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et à pour limite A.

limite d'une suite décroissante et minorée

$\ast$ Soit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ décroissante et minorée par un réel m. Notons B, le plus grand des minorants.

$*$ *Tout intervalle* $\left]B-\alpha;B+\alpha\right[$ *contient au moins un terme* u_p *de la suite. Sinon,* $B+\alpha$ *serait un minorant de la suite, ce qui contredit le fait que B soit le plus grand des minorants.*

$*$ *La suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante : pour tout* $n \geq p$, $u_n \leq u_p$..

$*$ ***Conclusion*** *: l'intervalle* $\left]B-\alpha;B+\alpha\right[$ *contient tous les termes de la suite à partir du rang p. Ceci est vrai, quelque soit le réel* $\alpha > 0$.

Par définition, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge et à pour limite B.*

<u>Limite d'une suite géométrique</u>

$*$ *Soit* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *une suite géométrique de raison q non nulle. Pour tout entier n :* $u_n = u_0 \times q^n$

$*$ *Si* $|q| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$

$*$ *Si* $q > 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$

$*$ *Si* $q = 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$

$*$ *Si* $q \leq -1$, q^n *n'a pas de limite*

<u>Théorème d'encadrement</u> (« des gendarmes »)

Soient trois suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *telles que :* $\forall n \geq n_0$, $\left.\begin{array}{r} v_n \leq u_n \leq w_n \\ \lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \ell \\ \lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \ell \end{array}\right\} \lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$

1.5 Suites adjacentes

<u>Théorème et définition</u>

Deux suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *et* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sont adjacentes si et seulement si :*

$*$ $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est croissante.*

$*$ $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

$*$ $\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n - v_n) = 0$

***Théorème** :*

Si deux suites sont adjacentes alors elles convergent et elles ont la même limite.