Série n° 5 exercices « Etude de fonction » 2éme Bac SM

EXERCICE 1:

Pour tout entier naturel n, on appelle f_n la fonction définie sur $[0;1]$ par : $f_n(x)=x^{n+\frac{1}{2}}(1-x)^{\frac{1}{2}}$ si $x\in]0;1[$ et $f_n(0)=f_n(1)=0$

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ du plan (unité graphique: 10 cm)

1- Montrer que C_0 est un demi-cercle de rayon 2 dont on précisera le centre

2- Soit n un entier naturel non nul

Justifier que f_n est dérivable sur $]0;1[$ et déterminer la dérivée f_n' de f_n sur $]0;1[$

Montrer que pour tout $x\in]0;1[$ f_n' a le même signe que $\left(n+\frac{1}{2}\right)-(n+1)x$

Montrer que f_n est dérivable en 0 et détermine $f_n'(0)$ .Interpréter géométriquement le résultat

f_n est-elle dérivable en 1?

Interpréter géométriquement le résultat

e) Dresser le tableau de variation de f_n (on ne calculera pas l'extremum)

3- a) Soit n un entier naturel

Etudier le signe de $f_{n+1}-f_n$ sur $[0;1]$

b) En déduire la position relative de C_n et C_{n+1}

c) Tracer C_0 , C_1 et C_2 dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

EXERCICE 2:

Soit f la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{2x}{\sqrt{x^2-4}}$

1) a) Montrer que f est dérivable sur $]2;+\infty[$ et que pour tout $x\in]2;+\infty[$; $f'(x)=\dfrac{-8}{\left(\sqrt{x^2-4}\right)^3}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Tracer (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé.

2) a) Montrer que f réalise une bijection de $x\in]2;+\infty[$, sur lui-même.

b) Expliciter $f\circ f(x)$ pour $x>2$. En déduire que la droite Δ : $y=x$ est un axe de symétrie pou(C_f)

3) Soit g la fonction définie sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, par : $g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{4} & si\ x\neq\frac{\pi}{2}\\ \frac{5}{4} & si\ x=\frac{\pi}{2}\end{cases}$

a) Montrer que g est continue à gauche de $\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que g est dérivable sur $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, et que : $g'(x)=\dfrac{-\cos x}{\sin^2 x}$ pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$.

4) a) Montrer que $\forall x\in\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$, on a : $|g'(x)|\leq\frac{2}{3}$.

b) Montrer que l'équation $g(x)=x$ admet dans $\left[\frac{\pi}{3};\frac{\pi}{2}\right]$, une solution unique α .

5) Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases}U_0=\frac{\pi}{3}\\U_{n+1}=g(U_n)\quad(\forall n\in\mathbb{N})\end{cases}$

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$: $\frac{\pi}{3}\leq U_n\leq\frac{\pi}{2}$.

b) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}$: $|U_{n+1}-\alpha|\leq\frac{2}{3}|U_n-\alpha|$ et en déduire que $\forall n\in\mathbb{N}$: $|U_n-\alpha|\leq\left(\frac{2}{3}\right)^n\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)$.

c) Montrer que (U_n) est convergente et donner sa limite.

6) On pose pour tout $x\in\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, $h(x)=\frac{5}{8}-\frac{1}{2}g(x)$.

a) Vérifier que $h(x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2\sin x}$

b) Dresser le tableau de variation de h

c) Montrer que h réalise une bijection de $\left]0;\frac{\pi}{2}\right[$, sur un intervalle que l'on précisera.

7) Soit la suite (V_n) définie par $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $V_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}h^{-1}\left(\frac{-k}{n^2}\right)$.

a) Montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*$; $h^{-1}\left(\frac{-1}{n}\right)\leq V_n\leq h^{-1}\left(\frac{-1}{n^2}\right)$.

b) En déduire que (V_n) est convergente et déterminer sa limite.