Série d'exercices

« DERIVABILITE ET APPLICATION »

2SM-BIOF ***Mer Khalid Haddar***

NIVEAU1

Exercice 1 :

Étudier la dérivabilité de f en x_0 dans les cas suivants, puis donner une interprétation géométrique :

$$\begin{cases} f(x) = x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} f(x) = \arctan\left(\sqrt{x^2-1}\right) & x \geq 1 \\ f(x) = (x-1)\sqrt[3]{1-x} & x < 1 \end{cases}$$

Exercice 2

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $\begin{cases} f(x) = 2x^2 + b & x \leq 2 \\ f(x) = 2ax^3 + 11a & x > 2 \end{cases}$

a et b deux nombres réels.

Déterminer a et b pour que f soit dérivable en 2

Exercice 3

En utilisant la composée, étudier la dérivabilité de f et déterminer sa dérivée dans chacun des cas suivants :

1) $f(x) = \cos\left(\sqrt{x^2+1}\right)$

2) $f(x) = \sqrt{x-2}\tan\left(\frac{\pi}{x}\right)$

Exercice 4

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) : 2\arctan\left(\sqrt{x^2+1} - x\right) + \arctan x = \frac{\pi}{2}$

Exercice 5

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ *par :* $f(x) = 3\sqrt[3]{x} - 4\sqrt[3]{x^2}$

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Étudier la dérivabilité de f à droite de 0, puis donner une interprétation géométrique.
3) Étudier les variations de f

Exercice 6

En utilisant la notion de dérivée, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to\frac{\sqrt{3}}{3}} \frac{\operatorname{Arc}\tan x-\frac{\pi}{6}}{x-\frac{\sqrt{3}}{3}} \quad , \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[2017]{x+3}-\sqrt[2017]{2}\sqrt[2017]{x}}{x-3}$$

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $[3,+\infty[$ par : $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x^2}$

1) Étudier la dérivabilité de f à droite de 3.
2) Montrer que f est dérivable sur $]3,+\infty[$, et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]3,+\infty[$.
3) Dresser le tableau de variation de f.
4) a -montrer que f est une bijection de $[3,+\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera.

   b- Montrer que f^{-1} est dérivable en $2\sqrt[3]{2}$ et calculer $\left(f^{-1}\right)'(2\sqrt[3]{2})$

Exercice 8

1) Soient f et g deux fonctions définies sur $\mathbb{R}^*$ par : $f(x)=\arctan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$

Et $g(x)=\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)-\arctan\left(\frac{x-1}{x}\right)$

1) Calculer la dérivée des deux fonctions f et g
2) Soit h la fonction définie par : $h(x)=f(x)-g(x)$

   a) Montrer que l'équation $h'(x)=0$ admet une solution unique $x_o\in[1,+\infty[$

   b) Calculer $h'(2)$ et déduire la valeur de x_o .

   c) Déduire la position relative de la courbe (C) et de la droite (D) d'équation $y = x$.

NIVEAU2

Exercice 9

Montrer que : $\left(\forall x\in\mathbb{R}^+\right)$: $(1+x)\arctan\left(\sqrt{x}\right)-\sqrt{x}\geq 0$

Exercice 10

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x)=\cos\left(\sqrt{x}\right)$

1) Montrer que f est dérivable à droite en 0, et donner une interprétation géométrique.
2) Montrer que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.
3) Étudier les variations de f sur $\left[0,\pi^2\right]$
4) a-Montrer que l'équation : $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}^*$; admet une unique solution a_n dans $[0,1]$.

b-Montrer que la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est croissante.

Exercice 11

1) Soit g la fonction définie sur $[0;\pi]$ par : $g(x)=\sin x - x\cos x$

Étudier les variations de g et déduire le signe de g sur $[0;\pi]$.

2) Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=x\sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et Interpréter graphiquement ce résultat.

b) Montrer que f est dérivable sur $[1;+\infty[$,et que : $\forall x\in[1,+\infty[$: $f'(x)=g\left(\frac{\pi}{x}\right)$

c) En déduire que f réalise une bijection de $[1;+\infty[$ sur un intervalle I à préciser.

d) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur I et calculer $(f^{-1})'(0)$ et $(f^{-1})'(2)$.

3) Soit $h(x)=f(x)-x$ où $\forall x\in[1,+\infty[$.

a) Étudier les variations de h' sur $[1;+\infty[$ et en déduire que l'équation $h'(x)=0$ admet une unique solution x_0 dans $[1;+\infty[$.

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par : $f(x)=3\sqrt[3]{x+1}-x$

1) a- calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

b- donner le tableau de variation de f.

2) montrer qu'il existe un seul réel α de $]2;3[$ tel que $f(\alpha)=\alpha$

3) a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Étudier la dérivabilité de f^{-1} sur J .

c) montrer que : $(f^{-1})'(\alpha)=\dfrac{4\alpha^2}{9-4\alpha^2}$

Exercice 13

Soit f la fonction définie par : $f(x)=\sqrt[3]{x-\arctan x}$

1) Montrer que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}^+$.

2) a- Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}^+$: $x-\dfrac{x^3}{3}\leq \arctan x\leq x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{x^5}{5}$

b- Étudier la dérivabilité de f à droite de 0, puis donner une interprétation géométrique.

3) Donner le tableau de variation f.

4) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.

Exercice 14

Soit $n\in\mathbb{N}$ *et* f_n *la fonction définie sur* $\mathbb{R}$ *par* : $f_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k x^{k+1}$

1) *Calculer* $f_n'(x)$ *pour tout* x *de* $\mathbb{R}$.

2) *En déduire la valeur de* $\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}C_n^k$.

Théorème de Rolle - Théorème des accroissements finies

NIVEAU1

Exercice 15 :

Soit f une fonction continue sur un intervalle $[a;b]$ *et dérivable sur* $]a;b[$ *telle que :*
$(\forall x\in]a;b[):\ f'(x)\neq 0$
Montrer que l'équation $f(x)=0$ *admet au plus une solution dans* $]a;b[$.

Exercice 16 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=(x^2-1)^3(x^4-16)^2$
Montrer que la dérivé f' *de f admet au moins trois racines distinctes autres que les réels* -2, -1, 1 *et* 2.

Exercice 17 :

Montrer que $|\cos x-\cos y|\leq|x-y|$, *pour tous réels* x *et* y.

Exercice 18 :

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0;1]$ *par* : $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$

1) *Montrer que f est dérivable sur et que pour tout* $x\in[0;1]$, $|f'(x)|\leq\frac{1}{2}$

2) *En déduire que :* $(\forall x\in[0;1])$: $1-\frac{1}{2}x\leq f(x)\leq 1$

Exercice 19 :

Montrer que : $\frac{1}{1+b^2}\leq\frac{\arctan b-\arctan a}{b-a}\leq\frac{1}{1+a^2}$, *pour tous* a *et* b *de* $\mathbb{R}^+$, $a<b$.

Exercice 20 :

Montrer que :

1) $(\forall x>0)$ $\frac{1}{2\sqrt{x+1}}\leq\sqrt{x+1}-\sqrt{x}\leq\frac{1}{2\sqrt{x}}$

2) $(\forall x>0)\ ;\dfrac{1}{3\sqrt[3]{(x+1)^2}}\leq\sqrt[3]{x+1}-\sqrt[3]{x}\leq\dfrac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$

<u>Exercice 21</u> :

1) Montrer que : $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(y-x)\leq\sin y-\sin x\leq\dfrac{\sqrt{3}}{2}(y-x)$

pour tous x *et* y *de* $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{4}\right]$ $,x<y$.

2) En déduire que : $\dfrac{\sqrt{2}}{12}\leq\dfrac{\sqrt{2}-1}{\pi}\leq\dfrac{\sqrt{3}}{12}$.

<u>Exercice 22</u> :

Soit f la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$ *par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{1}{\tan x} & ,\ x\neq\dfrac{\pi}{2} \\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\left[\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right]$

2) Montrer que : $\left(\forall x\in\left]\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[\right):-2\leq f'(x)\leq-1$

3) En déduire que : $\left(\forall x\in\left]\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[\right):\dfrac{\pi}{2}-2x\leq\dfrac{1-\tan x}{\tan x}\leq\dfrac{\pi}{4}-x$

<u>Exercice 23</u> :

Soit f une fonction continue sur $[0;1]$ *et dérivable sur* $]0;1[$ *telle que :* $f(1)=1$ *et* $f(0)=0$

Montrer que l'équation $2x\,f'(x)=\sqrt{x}$ *admet au moins une solution dans* $]0;1[$.

<u>NIVEAU2</u>

<u>Exercice 24</u> :

On considère une fonction f *dérivable sur* $[0;1]$ *telle que :* $f(0)=f'(0)=0$ *et* $f(1)=0$.

Soit g la fonction définie sur $[0;1]$ *par :* $\begin{cases} g(x)=\dfrac{f(x)}{x} & si\ x\neq 0 \\ g(0)=0 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue sur $[0;1]$

2) a- Montrer qu'il existe un réel c de $]0;1[$ *tel que :* $cf'(c)-f(c)=0$.

b- On désigne par (C) *la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.*

Montrer que (C) *possède au moins une tangente passant par l'origine du repère.*

Exercice 25 :

On considère une fonction f dérivable sur $[0;1]$ et positive strictement sur $]0;1[$ et $f(0)=0$

montrer que $(\exists c \in]0;1[)$: $\dfrac{2f'(c)}{f(c)} = \dfrac{f'(1-c)}{f(1-c)}$

Exercice 26 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \sin x - x^2$

1) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet au moins une solution c dans $\left]\dfrac{\pi}{4};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) En déduire que l'équation $\cos x - 2x = 0$ admet au moins une solution dans $\mathbb{R}$.

Exercice 27 :

Soit f la fonction définie sur $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = \dfrac{\pi}{2} - \sin x$.

1) Montrer que l'équation $f(x)=x$ admet une unique solution α dans $\left]\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right[$.

2) En déduire que pour tout x de $\left[\dfrac{\pi}{6};\dfrac{\pi}{2}\right]$: $|f(x)-\alpha| \leq \dfrac{\sqrt{3}}{2}|x-\alpha|$

Exercice 28 :

Soit f et g deux fonctions continues sur un intervalle $[\mathrm{a};\mathrm{b}]$ et dérivables sur $]\mathrm{a};\mathrm{b}[$ telle que :
$(\forall x \in]a,b[)$: $g'(x) \neq 0$

1) Montrer que : $g(a) \neq g(b)$

2) Montrer que : $(\exists c \in]a,b[)$: $\dfrac{f(\mathrm{b})-f(\mathrm{a})}{g(\mathrm{b})-g(\mathrm{a})} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$

3) On suppose que : $f(a)=g(a)=0$

Montrer que : $\lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to a^+} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

4) En déduire : $\lim\limits_{x \to \sqrt{3}} \dfrac{\operatorname{Arc}\tan x - \frac{\pi}{3}}{x-\sqrt{3}}$; $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\tan x - x}{x^3}$