Exercices N° 1 « Fonction Logarithme »

Exercice 1

A : Étude d'une fonction auxiliaire g est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $g(x)=\dfrac{2x^2}{x^2+1}-\ln(1+x^2)$

1) Démontrer que sur l'intervalle $[1;+\infty[$, *l'équation* $g(x)=0$ *admet une solution unique* α *et donner pour* α *un encadrement d'amplitude* 10^{-1} .

2) Préciser le signe de $g(x)$ *sur l'intervalle* $[0;+\infty[$.

B : Étude d'une fonction f est la fonction définie sur $[0;+\infty[$ *par :* $\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(1+x^2)}{x} & si\ \ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

1) a) Quelle est la limite de $\dfrac{f(x)-f(0)}{x}$ *quand x tend vers 0 ?*

b) En déduire que f est dérivable en $x=0$ *et trouver une équation de la tangente T à la courbe* (C_f) *en* $x=0$.

2) a) Vérifier que pour tout réel $x>0$; $f(x)=\dfrac{2\ln x}{x}+\dfrac{1}{x}\ln\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) a) Démontrer que pour tout réel $x>0$; $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$

b) En déduire les variations de f .

c) Construire T, puis (C_f) . *On prendra comme unités : 1 cm sur l'axe des abscisses et 4 cm sur l'axe des ordonnées.*