Exercice 01 : (05 points)

1)- a)- *En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :*

$$\left(\forall x\in\mathbb{R}^{*+}\right),\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x$$

b)- *En déduire que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^{*}\right),\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}<e^{n}<\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k+1}$.

2)- *On considère la suite* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^{*}\right),u_n=\frac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

a)- *Montrer que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^{*}\right),\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{k}=\frac{(n+1)^{n}}{n!}$.

b)- *En déduire que :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^{*}\right),\frac{1}{e}\times\frac{n+1}{n}<u_n<\frac{1}{e}\times\frac{n+1}{n}.\sqrt[n]{n+1}$.

c)- *Justifier que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{n+1}=1$. *Puis en déduire que* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *est convergente*

En précisant sa limite.

3)- *Déduire la limite de la suite* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ *définie par :* $\left(\forall n\in\mathbb{N}^{*}\right),S_n=\frac{1}{n}.\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k}{n}\right)$.

Exercice 02 : (05 points)

Soit f *la fonction définie sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *par :* $f(x)=\frac{\ln t}{1+t^{2}}$.

1)- *Montrer que* f *admet sur* $\mathbb{R}^{*+}$ *une primitive* F *tels que :* $F(1)=0$.

2)- *Etudier la monotonie de* F *sur* $\mathbb{R}^{*+}$. *Puis déduire que :* $\left(\forall t\in\mathbb{R}^{*+}\right),F(t)\geq 0$.

3)- a)- *Vérifier que :* $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right),\frac{\ln t}{(1+t)^{2}}\leq f(t)\leq\frac{\ln t}{t^{2}}$.

b)- *En déduire que :* $\left(\forall t\in[1,+\infty[\right),\ln 2+\ln\left(\frac{t}{1+t}\right)-\frac{\ln t}{t+1}\leq F(t)\leq 1-\frac{\ln t}{t}-\frac{1}{t}$.

4)- a)- *Montrer que* F *est majorée sur l'intervalle* $[1,+\infty[$.

F *étant croissante et majorée sur* $[1,+\infty[$, *On admet qu'elle a une limite finie*

En $+\infty$ et On pose : $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)=L$.

b)- Justifier que : $\ln 2 \le L \le 1$.

5)- Soit G la fonction définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $G(t)=F\left(\frac{1}{t}\right)-F(t)$.

a)- Montrer que G est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$. Puis calculer $G'(t)$ pour tout $t\in\mathbb{R}^{*+}$.

b)- En déduire que : $\left(\forall t\in\mathbb{R}^{*+}\right), F\left(\frac{1}{t}\right)=F(t)$. Puis calculer $\lim\limits_{t\to0^+} F(t)$.

<u>Exercice 03 :</u> (10 points)

I- Soit f la fonction définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{x}{\sqrt{\ln x}}$.

1)- **a)**- Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

b)- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$, puis en déduire la nature de la branche infini de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$.

2)- **a)**- Montrer que f est dérivable sur $]1,+\infty[$ et que : $f'(x)=\frac{2\ln x-1}{2\left(\sqrt{\ln x}\right)^3}$.

b)- Dresser le tableau de variation de f en justifiant votre réponse.

3)- Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé.

4)- Justifier que f admet sur $]1,+\infty[$ une primitive F .

II- Soit $n\in\mathbb{N}$ tels que : $n\ge3$.

1)- Justifier que l'équation $f(x)=n$, admet dans l'intervalle $]1,+\infty[$ exactement Deux solutions a_n et b_n tels que : $1<a_n<\sqrt{e}<b_n$.

2)- Vérifier que : $(\forall n\ge3), b_n>n$. Puis déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.

3)- Montrer que : $(\forall n\ge3), \frac{1}{n^2}<\ln(a_n)<\frac{e}{n^2}$. Puis en déduire que la suite $(a_n)_{n\ge3}$ Est convergente en précisant sa limite.

III- Soit G *la fonction définie sur* $\left[1,+\infty\right[$ *par :* $G(1)=0$ *Et* $G(x)=F\left(x^2\right)-F(x), \text{si } x>1$

1)- a)- *Vérifier que :* $\left(\forall x\in\left]1,+\infty\right[\right), G(x)>0$.

b)- *Montrer que* G *est dérivable sur* $\left]1,+\infty\right[$ *et que :* $G'(x)=\left(\sqrt{2}.x^2-1\right)f(x)$.

c)- *En déduire le sens de variation de* G *sur* $\left]1,+\infty\right[$.

2)- a)- *En utilisant le théorème des accroissements finis, Montrer que :*

$$\left(\forall x\in\left]1,\sqrt[4]{e}\right[\right), \frac{x^3(x-1)}{\sqrt{2.\ln x}}<G(x)<\frac{x^2(x-1)}{\sqrt{\ln x}}$$

b)- *Montrer que* G *est continue à droite en* $x_0=1$.

c)- *Etudier la dérivabilité de* G *à droite* $x_0=1$ *et interpréter le résultat obtenu.*

3)- a)- $\left(\forall x\in\left]\sqrt{e},+\infty\right[\right), G(x)>\dfrac{x^2(x-1)}{\sqrt{\ln x}}$.

b)- *Déduire* $\lim\limits_{x\to+\infty} G(x)$ *et* $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{G(x)}{x}$ *, puis interpréter ces deux limites .*