Exercice 1 :(3.5 points)

Pour tout x et y de l'intervalle $I =]0,1[$ on pose : $x * y = \dfrac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}$

0.5 1- a)Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

0.5 b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0.5 c) Montrer que $(I,*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.5 2-Montrer que $(I,*)$ est un groupe commutatif.

3-On considère les deux ensembles $H = \{2^n \,/\, n \in \mathbb{Z}\}$ et $K = \left\{\dfrac{1}{1+2^n} \,/\, n \in \mathbb{Z}\right\}$

0.5 a)Montrer que H est un sous-groupe de $(\mathbb{R}_+^*, \times)$

0.5 b) On considère l'application : $\varphi : \begin{array}{l} H \to I \\ x \mapsto \dfrac{1}{1+x} \end{array}$

montrer que φ est un homomorphisme de $(H,\times)$ vers $(I,*)$

0.5 c)En déduire que K est un sous-groupe de $(I,*)$

Exercice 2:(2.5points)

Soit x un nombre entier naturel tel que : $10^x \equiv 2\ [19]$

0.25 1- a) vérifier que : $10^{x+1} \equiv 1\ [19]$

0 .5 b) Montrer que : $10^{18} \equiv 1\ [19]$

2- Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres 18 et $x+1$

0.75 2- a) Montrer que : $10^d \equiv 1\ [19]$

0.5 b) Montrer que : $d = 18$

0.5 c)En déduire que : $x \equiv 17\ [18]$

Exercice 3:(4 points)

Première partie :

On considère dans l'ensemble l'équation : $(E) : z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = 0$

0.5 1-Vérifier que $-2i$ est une solution de l'équation (E)

0.5 2-Déterminer les deux nombres complexes α et β tels que : $(\forall z \in \mathbb{Z})$

$$z^3 - (1+2i)z^2 + 3(1+i)z - 10(1+i) = (z+2i)(z^2 + \alpha z + \beta)$$

0.5 3- a) Déterminer les deux racines carrées du nombre $5-12i$

0.5 b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E)

Deuxième partie :

Le plan complexe étant rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A et B et C d'affixes respectifs $a=-1+3i$; $b=-2i$ et $c=2+i$

0.5 1-Montrer que le triangle ABC est rectangle et isocèle en C.

2-On considère la rotation R_1 de centre B et dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{3}$ et la rotation R_2 de centre A et dont une mesure de l'angle est $\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

Soit M un point du plan complexe d'affixe z et M_1 son image par la rotation R_1 et M_2 son image par la rotation R_2.

0.5 a)Vérifier que l'expression complexe de la rotation R_1 est :

$$z'=\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right)z-\sqrt{3}-i$$

0.5 b) Déterminer z_2 l'affixe de M_2 en fonction de z.

0.5 c) En déduire que I, le milieu du segment $[M_1M_2]$, est un point fixe.

Exercice 4:(6 points)

Soit f la fonction numérique définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=x+\ln x$

et (C) sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O;\vec{i},\vec{j})$

(On prendra $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1cm$)

1 1- calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x)-x)$

0.25 2- a) Dresser le tableau de variations de la fonction f

0.75 b) Montrer que f est une bijection de l'intervalle $]0;+\infty[$ vers un intervalle J que l'on déterminera puis dresser le tableau de variation de la bijection réciproque f^{-1}

0.75 3- Calculer $f(1)$ et $f(e)$ puis construire (C) et (C') la courbe représentative de f^{-1} dans le même repère $(O;\vec{i},\vec{j})$

0.5 4- a) Calculer l'intégrale $\int_1^e f^{-1}(x)\,dx$ (on posera : $t=f^{-1}(x)$)

0.5 b) En déduire l'aire du domaine plan limité par (C') et les droites d'équations : $x=1$; $x=e+1$ et $y=x$

5- Pour tout entier naturel non nul n, on considère l'équation : (E_n) : $x+\ln x=n$

0.25 a) Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique x_n.

0.5 b) Déterminer la valeur de x_1 puis montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=+\infty$

0.5 6- a) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $f(x_n)\le f(n)$ en déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $x_n\le n$

0.5 b) Montrer que : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right)$; $n-\ln(n)\le x_n$

0.5 c) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n-n}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{x_n}{n-\ln(n)}$

Exercice 5 :(4 points)

Soit n un entier naturel non nul et f_n la fonction numérique définie sur par :

$$f_n(x)=-1+x+\frac{x^2}{2}+\cdots+\frac{x^n}{n}$$

0.5 1-Montrer que pour $n\ge 2$ il existe un réel unique α_n de l'intervalle $]0,1[$ tel que : $f_n(\alpha_n)=0$

0.75 2-Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\ge 2}$ est strictement décroissante en déduire qu'elle est convergente. (On pose : $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$)

0.5 3- a)Vérifier que pour $t\ne 1$ on a : $1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{t^n}{1-t}$

0.5 b) En déduire que : $\alpha_n+\dfrac{\alpha_n^2}{2}+\cdots+\dfrac{\alpha_n^n}{n}=-\ln(1-\alpha_n)-\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt$

0.5 4- a) Montrer que : $(\forall n\ge 2)$; $1+\ln(1-\alpha_n)=-\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt$

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\ge 2)$; $0\le\displaystyle\int_0^{\alpha_n}\frac{t^n}{1-t}dt\le\frac{1}{(n+1)(1-\alpha_n)}$

0.75 c) En déduire que : $l=1-e^{-1}$