Exercice 1

On donne les points $A(1;1;0)$; $B(1;-1;1)$ et $C(0;1;1)$.

Soit le plan (P) d'équation : $x+2y-2z+1=0$

1) Calculer $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$ et en déduire que les points A ; B et C ne sont pas alignés

a) Montrer que : $2x+y+2z-3=0$ est une équation cartésienne du plan (ABC) .

b) Vérifier que les plans $(P)\perp(ABC)$.

c) Donner une représentation paramétrique de la droite (D) intersection des plans (P) et (ABC).

d) Soit le point $I(2;1;1)$ et M un point de (D).

Déterminer M pour que la distance IM soit minimale et en déduire $d(I;(D))$.

2) a) Montrer que les points I ; A ;B et C ne sont pas coplanaires .

b) Calculer le volume du tétraèdre IABC.

c) Calculer $d(I;(ABC))$ et en déduire l'aire du triangle ABC.

3) Soit l'ensemble (S) des points $M(x;y;z)$ vérifiant : $x^2+y^2+z^2-4x-2y-2z+\dfrac{38}{9}=0$

a) Montrer que S est une sphère de centre I et tangente au plan (ABC) .

b) Déterminer une équation cartésienne du plan (Q) tangent à la sphère (S) et strictement parallèle à (ABC).

c) Montrer que le plan (P) coupe la sphère (S) suivant un cercle (Γ) dont on précisera le rayon r et les coordonnées de son centre K.

Exercice 2

Une urne A contient trois boules : une rouge, une bleue et une noire. Une urne B contient trois boules : une rouge et deux noires. Une urne C contient trois boules : deux bleues et une noire.

On tire une boule, au hasard, de chaque urne.

On suppose que, dans chaque urne, les tirages sont équiprobables.

1. *a) Quelle est la probabilité p_0 de n'obtenir aucune boule noire ?*

b) Quelle est la probabilité p_1 d'obtenir exactement une boule noire ?

c) Quelle est la probabilité p_2 d'obtenir exactement deux boules noires ?

d) Quelle est la probabilité p_3 d'obtenir trois boules noires ?

2. *Si on tire exactement une boule noire, on perd un point. Si on tire zéro ou deux boules noires, on gagne zéro point. Si on tire trois boules noires, on gagne trois points.*

a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui à tout tirage associe le gain réalisé ?

b) Calculer l'espérance mathématique de X. La règle du jeu est-elle favorable au joueur ?

Exercice 3:

On considère la suite numérique $(U_n)_{n\geq 0}$ définie par: $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{5} \\ U_{n+1} = \dfrac{2U_n}{2U_n+1} \quad ;(\forall n \in IN) \end{cases}$

1) Calculer U_1 et montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN)\ ;0 < U_n < \dfrac{1}{2}$.

2) Montrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ est strictement croissante.

3) Soit (V_n) la suite définie par : $(\forall n \in IN);\ V_n = \dfrac{3^n U_n}{2U_n - 1}$

a) Démontrer que (V_n) est une suite géométrique de raison $q = 6$, puis déterminer son premier terme V_0

b) Exprimer V_n en fonction de n et montrer que $U_n = \dfrac{2^n}{3+2^{n+1}}$

4) Montrer que $(U_n)_{n\geq 0}$ est convergente ; puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$. .

5) On pose $S_n = V_3 + V_4 + \ldots + V_n$.

Monter que $S_n = \dfrac{72}{5}\left(1-6^{n-2}\right)$ et déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n$.

Exercice 4:

1) Résoudre dans l'ensemble, l'équation :$(E): z^2 - 4z + 13 = 0$.

2) Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormé direct$(O;\vec{u};\vec{v})$,

On Considère les points A ; B et C d'affixes :$z_A = i$; $z_B = 2+3i$ et $z_C = 2-3i$.

a) Soit r la rotation de centre B et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

On pose $A' = r(A)$.

Montrer que :$z_{A'} = -2i\sqrt{2}$.

b) Ecrire sous forme algébrique $\dfrac{z_{A'} - z_B}{z_C - z_B}$; les points A' ; B et C sont-ils alignés?

c) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre B tels que $A' = h(C)$.

Problème

I- On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = ln^3(x) + ln(x) - 2$

1) Démontrer que pour tout x de $]0;+\infty[$: $g'(x) = \dfrac{3ln^2(x)+1}{x}$

2) Calculer $g(e)$, puis dresser le tableau de variation de g.

3) Déduire que $g(x) \le 0$ sur $]0;e]$ et $g(x) \ge 0$ sur $[e;+\infty[$.

II- Soit f la fonction numérique définie par : $f(x) = ln(x) - \frac{1}{ln(x)} + \frac{1}{ln^2(x)}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Montrer que $D_f =]0;1[\cup]1;+\infty[$.

2) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

3) a) Montrer que : $(\forall x \in D_f)$; $f(x) = \frac{ln^3(x) - ln(x) + 1}{ln^2(x)}$

b) Déduire que $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ ainsi interpréter géométriquement ces deux résultats.

4) Calculer $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et montrer que (C_f) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ déterminera sa direction.

5) a) Démontrer que pour tout x de $]0;1[\cup]1;+\infty[$: $f'(x) = \frac{1}{xln^2(x)} \cdot \frac{g(x)}{ln(x)}$

b) Étudier le signe de $f'(x)$ sur $]0;1[\cup]1;+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de f.

d) Donner l'équation de la tangente (T) au point d'abscisse e.

6) Montrer que (C_f) coupe l'axe des abscisses en un unique point α tel que $e^{-2} < \alpha < e^{-1}$

7) Construire la courbe (C_f) et la tangente (T) dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

8) Soit h la fonction définie sur $[e;+\infty[$ par : $h(x) = f(x)$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur J à déterminer.

b) Donner le tableau de variation de h^{-1}.

c) Montrer que $h(e^2) = \frac{7}{4}$ puis déduire la valeur de $(h^{-1})'\left(\frac{7}{4}\right)$.

d) Construire la courbe $(C_{h^{-1}})$ dans le même repère et avec une autre couleur.