# Les suites numériques
## (exercices) 2éme Bac PC-SVT

## Exercice 1 :

On considère la suite (Un) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = 5U_n - 2 \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1/ Calculer $U_1$ et $U_2$.

2/ Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in IN) \ \ U_n > \frac{1}{2}$$

3/ Etudier la monotonie de $(U_n)$.
En déduire que :

$$(\forall n \in IN) \ U_n \leq 1$$

## Exercice 2 :

Soit la suite $(U_n)$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{3}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2}{3 - U_n} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1/ Calculer $U_1$ et $U_2$.
2/ Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in IN) \ (1 < U_n < 2)$$

3/ Vérifier que : $(\forall n \in IN) \ U_{n+1} - U_n = \dfrac{(U_n - 1)(U_n - 2)}{3 - U_n}$

Puis déduire la monotonie de $(U_n)$

## Exercice 3 :

On considère la suite $(U_n)$ définie par :

1/ Montrer que :

$$(\forall n \in IN)\ ;\ 0 < U_n < 1$$

2/ Montrer que :

$$(\forall n \in IN);\ \frac{U_{n+1}}{U_n} < 1$$

Puis déduire la monotonie de $(U_n)$

3/ On pose :

$$(\forall n \in IN)\ V_n = \frac{U_n}{U_{n-1}}$$

a/ Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

b/ Donner $V_n$ puis $U_n$ en fonction de n.

## Exercice 4 :

Soit la suite $(U_n)$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = 3 - \dfrac{9}{4U_n} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1/ Montrer que :

$$(\forall n \in IN)\ U_n > \frac{3}{2}$$

Puis étudier la monotonie de $(U_n)$.

2/ On pose : $V_n = \dfrac{2}{2U_n - 3}$

a/ Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme.

b/ Donner $V_n$ puis $U_n$ en fonction de n.

## Exercice 5 :

On considère la suite $(U_n)$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{2} \\ U_{n+1} = \sqrt{2 + \dfrac{U_n^2}{2}} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1/ Montrer par récurrence que :

$$(\forall n \in IN) \ ; \ 0 < U_n < 1$$

2/ Comparer $U_n^2$ et $U_{n+1}^2$ et déduire la monotonie de ($U_n$).

3/ On passe : $V_n = U_n^2 - 4 \ \ (\forall n \in IN)$

a/ Montrer que ($V_n$) est une suite géométrique et déterminer sa raison et son terme initiale.

b/ Donner $V_n$ et $U_n$ en fonction de n.

c/ Calculer la somme $S_n$ en fonction de n tel que :

$$S_n = U_0^2 + U_1^2 + U_2^2 + \dots + U_n^2$$

## Exercice 6 :

Soit la suite ($U_n$) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{2n+1}{4n+6} \ (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1/ Calculer $U_1$ et $U_2$

2/ Montrer que : $\forall n \in IN \ \ 0 \leq U_{n+1} \leq U_n$

3/ On pose : $\forall n \in IN \ \ \mathrm{V}_n = (2n+1)U_n$

a/ Montrer que ($V_n$) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{2}$ .

b/ Déduire l'expression explicite de $V_n$ en fonction de n.

c/ Donner $U_n$ en fonction de n ; puis calculer $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$

## Exercice 7 :

On considère la suite ($U_n$) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{8} \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n^2}{1-2U_n^2} \end{cases} (\forall n \in IN)$$

1/ Montrer que : $(\forall n \in IN) \ 0 < U_n < \dfrac{1}{4}$

2/ Etudier la monotonie de ($U_n$). Que peut-on déduire ?

3/ Montrer que : $(\forall n \in IN) \ U_{n+1} < \dfrac{2}{7}$

4/ Déduire que : $(\forall n \in IN) \ U_n \leq \left(\dfrac{2}{7}\right)^n U_0$ puis calculer $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$ .

## Exercice 8 :

On considère la suite $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 4}{U_n + 3} \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

1/ Montrer que : $(\forall n \in IN)\ ; -2 < U_n < 2$.

2/ Etudier la monotonie de $(U_n)$ ; et déduire que $(U_n)$ est convergente.

3/ On pose : $(\forall n \in IN)\ V_n = \dfrac{U_n - 2}{U_n + 2}$

a/ Montrer que $(V_n)$ est une suite géométrique et déterminer sa raison et son premier terme

b/ Donner l'expression de $V_n$ et $U_n$ en fonction de n. Et calculer : $\lim\limits_{n\to\infty} U_n$.

## Exercice 9 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = x(\sqrt{x} - 2)^2$

1/ Résoudre dans $\mathbb{R}^+$.

2/ a/ Montrer que : $(\forall n \in IN)\ f'(x) = 2(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} - 2)$.

b/ Déduire la monotonie de f sur : $[0;1]$

c/ Montrer que : $f([0;1]) = [0;1]$.

3/ On considère la suite $(U_n)$ définie par : $\begin{cases} U_0 = \dfrac{1}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$

a/ Montrer que : $(\forall n \in IN)\ U_n \in [0;1]$.

b/ Etudier la monotonie de $(U_n)$.

c/ Déduire que $(U_n)$ est une suite convergente et calculer sa limite.

## Exercice 10 :

On considère la suite $(U_n)$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 \in ]-1;0[ \\ U_{n+1} = U_n + U_n^2 \end{cases} \quad (\forall n \in IN)$$

Et on pose la fonction : $f(x) = x + x^2$.

1/ Montrer que : $f(]-1;0[) \subseteq ]-1;0[$ .

2/ a/ Montrer que : $(\forall n \in IN)\ U_n \in ]-1;0[$.

b/ Montrer que $(U_n)$ est une suite croissante.

3/ Montrer que $(U_n)$ est convergente et calculer sa limite.

## Exercice 11 :

Soit f la fonction définie par :

$$f(x)=x-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Et $(C_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1/ a/ Déterminer $D_f$ puis calculer les limites de f aux bornes de $D_f$.

b/ Déterminer les 2 branches infinies à $(C_f)$.

2/ a/ Montrer que :

$$(\forall x\in D_f)\ f'(x)=\left(\frac{2x+\sqrt{x}+1}{2x\sqrt{x}}\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$$

b/ Dresser le tableau de variation de f.

3/ Etudier la position relative de $(C_f)$ et la droite $(\Delta)$ d'équation $y=x$.

4/ Vérifier que :

$$f(4)=\frac{5}{2}\ et\ f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{7}{4}$$

5/ soit g la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]1;+\infty[$.

a/ Montrer que g admet une fonction réciproque définie sur une intervalle $\mathcal{J}$ à déterminer.

b/ Construire $\left(C_{g^{-1}}\right)$ dans le même repère.

c/ Calculer $g^{-1}\left(\frac{5}{2}\right)$.

6/ On considère la suite $(U_n)$ définie par :

$$\begin{cases}U_0=2\\ U_{n+1}=f(U_n)\end{cases}\ (\forall n\in IN)$$

a/ Montrer que : $(\forall n\in IN)\ U_n>1$.

b/ Montrer que la suite $(U_n)$ est décroissante.

c/ Déduire que $(U_n)$ est convergente puis déterminer sa limite.