Exercice 6 « Fonction Exponentielle »

Exercice 6

Soit f la fonction numérique de la variable réelle x définie par: $f(x)=\dfrac{2e^{2x}-2}{2e^{2x}-5e^{x}+2}$

et (C) *sa courbe représentative dans un repère Orthonormé* $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- *Déterminer D l'ensemble de définition de f, et étudier la parité de f.*

2- *Étudier les variations de f.*

3- a. *Donner une équation de la tangente à* (C) *au point d'abscisse 0.*

b. *Déterminer les branches infinies de* (C).

c. *Tracer la courbe* (C).

Correction Exercice 6

$$f(x)=\frac{2e^{2x}-2}{2e^{2x}-5e^{x}+2}$$

1) Déterminons D:

On a: $x\in D \Leftrightarrow x\in IR$ *et* $2e^{2x}-5e^{x}+2\neq 0$

On pose $t=e^{x}$ *avec* $t>0$ *; l'équation:* $2e^{2x}-5e^{x}+2=0$ *devient :* $2t^{2}-5t+2=0$

Résolvons dans IR, l'équation $2t^{2}-5t+2=0$

Le discriminant de cette équation est: $\Delta=9$ *,et ses solutions sont:* $t_1=\dfrac{1}{2}$ *et* $t_2=2$

Donc : $x\in D \Leftrightarrow x\in IR\ ;\ e^{x}\neq\dfrac{1}{2}$ *et* $e^{x}\neq 2$

$$\Leftrightarrow x\in IR\ ;\ x\neq \ln\frac{1}{2}\ et\ x\neq \ln 2$$

Donc: $D=\left]-\infty;\ln\dfrac{1}{2}\right[\cup\left]\ln\dfrac{1}{2};\ln 2\right[\cup\left]\ln 2;+\infty\right[$ D

2) <u>*Etudions la parte de f:*</u>

Soit $x\in D$ *, on a:* $-x\in D$ *et*
$$f(-x)=\frac{2e^{2-x}-2}{2e^{2-x}-5e^{-x}+2}$$
$$=\frac{(2-2e^{2x})\cancel{e^{2-x}}}{(2-5e^{x}+2e^{2x})\cancel{e^{2-x}}}$$
$$=-\frac{2e^{2x}-2}{2e^{2x}-5e^{x}+2}$$
$$=-f(x)$$

Donc f est une fonction impaire.

2) <u>*Etudions les variations de f*</u>

Puisque f est une fonction impaire, alors il suffit de l'étudier sur Ensemble: $[0;\ln 2[\cup]\ln 2;+\infty[$

Calcul des limites

Tableau de signe de $f(x)$

x	0 $\qquad$ $\ln 2$ $\qquad$ $+\infty$
$2e^{2x}-5e^{x}+2$	$-$ $\quad\|\quad$ $+$

Soit $x\ [0;\ln 2[\cup]\ln 2;+\infty[$ *, on a :*

■ *Calculons:* $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^-} f(x)$

$$\lim_{x\to(\ln 2)^-} f(x)=\lim_{x\to(\ln 2)^-}\frac{2e^{2x}-2}{2e^{2x}-5e^{x}+2}=-\infty$$

$$(Car\ \lim_{x\to(\ln 2)^-} 2e^{2x}-5e^{x}+2=0^- \ et\ \lim_{x\to(\ln 2)^-} 2e^{2x}-2=6)$$

Donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to(\ln 2)^-} f(x)=-\infty}$

■ *Calculons:* $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} f(x)$

Soit $x\ [0;\ln 2[\cup]\ln 2;+\infty[$,

on a : $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} f(x)=\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+}\dfrac{2e^{2x}-2}{2e^{2x}-5e^{x}+2}=+\infty \qquad (Car\ \lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} 2e^{2x}-5e^{x}+2=0^+ \ et\ \lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} 2e^{2x}-2=6)$

Donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to(\ln 2)^+} f(x)=+\infty}$

■ *Calculons:* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Soit $x\ [0;\ln 2[\cup]\ln 2;+\infty[$ *, on a :*

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-2e^{-2x})\cancel{e^{2x}}}{(2-5e^{-x}+2e^{-2x})\cancel{e^{2x}}}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2-2e^{-2x})}{(2-5e^{-x}+2e^{-2x})}=1 \qquad (Car\ \lim_{x\to+\infty} e^{-2x}=0\ et\ \lim_{x\to+\infty} e^{-x}=0)$$

Donc: $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1}$

■ *Calculons:* $f'(x)$

La fonction f est dérivable en tout point de son ensemble de définition car c'est le quotient de deux fonctions dérivables

Soit $x\in D$ *, on a:* $f'(x)=\left(\dfrac{2e^{2x}-2}{2e^{2x}-5e^{x}+2}\right)'$

$$=\frac{4e^{2x}(2e^{2x}-5e^{x}+2)-(2e^{2x}-2)(4e^{2x}-5e^{x})}{(2e^{2x}-5e^{x}+2)^2}$$

$$=\frac{\cancel{4e^{2x}\times 2e^{2x}}-4e^{2x}\times 5e^{x}+2\times 4e^{2x}-\cancel{4e^{2x}\times 2e^{2x}}+2\times 4e^{2x}+2e^{2x}\times 5e^{x}-2\times 5e^{x}}{(2e^{2x}-5e^{x}+2)^2}$$

$$=\frac{-20e^{3x}+10e^{3x}+16e^{2x}-10e^{x}}{(2e^{2x}-5e^{x}+2)^2}$$

$$=\frac{2e^{x}(-5e^{2x}+8e^{x}-5)}{(2e^{2x}-5e^{x}+2)^2}$$

Donc : $(\forall x \in D)$ $\boxed{f'(x) = \dfrac{2e^{x}\left(-5e^{2x}+8e^{x}-5\right)}{\left(2e^{2x}-5e^{x}+2\right)^{2}}}$

Le signe de $f'(x)$ *est celui de* $\left(-5e^{2x}+8e^{x}-5\right)$

On pose $X = e^{x}$ *, et on obtient:*

$-5e^{2x}+8e^{x}-5 = -5X+8X-5$

Le discriminant de l'équation : $-5X+8X-5=0$ *est négatif.*

donc: $-5X+8X-5<0$

D'ou: $(\forall x \in D)$; $-5e^{2x}+8e^{x}-5<0$

Donc : $(\forall x \in D)$ $f'(x)<0$

Alors f est strictement décroissante sur chacun des intervalles de D.

f est une fonction impaire donc elle conserve la monotonie et inverse les limites

Tableau de variations de f

x	$-\infty$	$\ln\frac{1}{2}$		$\ln 2$		$+\infty$
$f'(x)$	-	||	-	||	-	
$f(x)$	$-1 \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow -\infty$	||	$+\infty \searrow 1$	

3) a. Equation de la tangente au point d'abscisse 0:

On a: $f(0)=0$ *et* $f'(0)=-4$; *donc l'équation de la tangente est:* $y=-4x$

b. On a: ■ $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ *donc la droite d'équation* $y=1$ *est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de* $+\infty$.

■ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-1$ *donc la droite d'équation* $y=-1$ *est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de* $-\infty$.

On a: $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^{+}} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to(\ln 2)^{-}} f(x)=-\infty$ *donc(C) admet une asymptote verticale d'équation:*

$x=\ln(2)$.

On a: $\lim\limits_{x\to\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{+}} f(x)=+\infty$ *et* $\lim\limits_{x\to\left(\ln\frac{1}{2}\right)^{-}} f(x)=-\infty$ *donc(C) admet une asymptote verticale d'équation:*

$x=\ln(2)$.

c. Construction Graphique