guessmaths

GÉNÉRALITÉS SUR LES FONCTIONS

1- FONCTION ET COURBE REPRÉSENTATIVE

Important : *Qu'est-ce qu'une fonction ?*

►*Soit D une partie de IR*
On définit une fonction f de D dans IR en associant à chaque nombre réel x de D un nombre réel et un seul noté f(x).
On note $f : D \to IR$
$x \mapsto f(x)$
et on lit « fonction f de D dans IR qui à x associe f(x) ».
On dit que f(x) est l'image de x par f et que x est un antécédent de f(x).

Attention !
Il ne faut pas confondre la fonction f et le nombre réel f(x) qui désigne l'image de x par f .

Exemple
Soit f la fonction définie par :
$$f : D \to IR$$
$$x \mapsto f(x) = 4x - 3$$
L'image f(2) de 2 par la fonction f vaut :
$$f(2) = 4\times 2 - 3 = 5$$

Ensemble de définition
►*L'ensemble de définition d'une fonction f est l'ensemble de tous les nombres réels qui possèdent une image par f.*
On le note D_f .

Exemple 1
$$f(x) = \frac{1}{x}$$
On a: $D_f = IR^* =]-\infty;0[\cup]0;+\infty[$ **(car on ne peut pas diviser par 0)** .

Exemple 2
$$f(x) = \sqrt{3-x}$$
Pour que la fonction f soit définie, il faut que **(3-x) soit positif ou nul** *car la racine carrée d'un nombre n'est définie que si le nombre est positif ou nul.*
d'où $D_f =]-\infty;3]$.

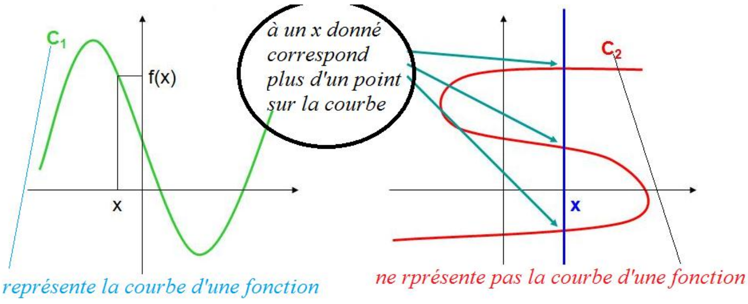
Egalité de deux fonctions

Deux fonctions f et g sont égales si et seulement si:
- *elles ont le même ensemble de définition:* $D_f = D_g$
- *pour tout x de cet ensemble de définition, f(x)=g(x).*

Il ne faut jamais oublier la première condition, qui est nécessaire.

Représentation graphique

→*La représentation graphique d'une fonction ou courbe représentative*
Soit f une fonction et soit D_f *son ensemble de définition.*
Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées (x, f(x)) où x décrit D_f *est appelé courbe représentative ou représentation graphique de la fonction f.*
On la note C_f *et on dit que* C_f *a pour équation y=f(x).*



<u>Définition 1 :</u>

Soit I un intervalle ou une réunion d'intervalle de IR.
Définir une fonction f de I dans IR, c'est associer à chaque réel x de I au plus un réel de IR noté f(x).
I est alors l'ensemble de définition de f : on dit que f est définie sur I
f(x) est ainsi un réel qui est l'image de x par f.

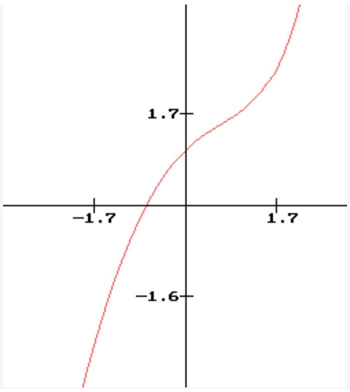
<u>Définition 2 :</u>

Le graphique qui réunit tous les points M de coordonnées (x, f(x)) où x décrit l'ensemble de définition I de f est la courbe représentative de f dans un plan. L'ensemble des x décrit l'ensemble de définition de f. On a l'habitude de le noter I ou D.

<u>Remarques :</u>

- *Pour représenter cette courbe représentative de f, on utilise un tableau de valeurs.*
- *Les unités ne sont obligatoirement pas les mêmes sur les deux axes.*
- *Le tracé de la courbe représentative d'une fonction ne peut jamais être exacte, d'autant plus que l'on est limité matériellement par la feuille de papier. (il est impossible de tracer une courbe jusqu'à $+\infty$ par exemple)*

<u>Exemple de graphique de fonction</u>



2- PARITÉ

<u>3.1 Fonctions paires</u>

Définition : une fonction est paire si et seulement si :
- *son ensemble de définition I est symétrique par rapport à 0*
- *pour tout x de I, on a f(-x) = f(x)*

Représentation graphique : la courbe représentative d'une fonction paire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
Exemple d'une fonction paire : la fonction valeur absolue que l'on notera f

- *f est définie sur IR* ($]-\infty;+\infty[$). *IR est donc bien symétrique par rapport à 0*
- *pour tout x de R, f(-x) = |-x| = |x| = f(x)*

3.2 Fonctions impaires

Fonctions impaires

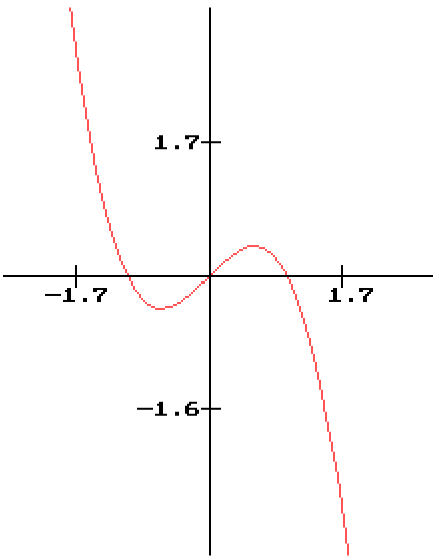
Définition : une fonction est impaire si et seulement si :

- *son ensemble de définition I est symétrique par rapport à 0*
- *pour tout x de I, on a f(-x) = -f(x)*

Représentation graphique : la courbe représentative d'une fonction impaire dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine du repère du plan.
Exemple d'une fonction impaire : la fonction g définie sur $J=[-5;5]$ *par :* $g(x)=x^3-x$

- *L'ensemble de définition [-5 ; 5] est bien symétrique par rapport à 0*
- *pour tout x de J, on a :* $g(-x)=(-x)^3-(-x)=-(x^3-x)=-g(x)$

Graphique de la fonction g



ELEMENTS DE SYMETRIE D'UNE COURBE

Cela permet de réduire l'étude d'une fonction sur un intervalle réduit de l'ensemble de définition de cette fonction.
Mais, attention, il faut toujours expliquer pourquoi, à partir de la connaissance de f sur un petit intervalle, on peut connaître f sur son ensemble de définition entier.

AXE DE SYMÉTRIE $x=a$ ***avec*** $a\in IR$

Pour montrer qu'une fonction admet la droite d'équation x=a comme axe de symétrie, il existe 3 méthodes:

1. On vérifie que pour tout x de D_f, $(2a-x)$ *est dans* D_f *, puis que* $f(2a-x)=f(x)$.

2. On vérifie que pour tout réel h tel que : $(a-h)\in D_f$ et $(a+h)\in D_f$, puis que :

$f(a-h)=f(a+h)$.

3. On utilise le changement de repère: il s'agit de montrer que C_f est la courbe représentative d'une fonction F paire dans le repère $(\Omega;i;j)$, Ω ayant pour coordonnées (a; 0) dans le repère (O, i, j). f vérifie alors $Y=f(X)$ .On obtient les formules suivantes de changement de repère :

Pour $M(x;y)$ dans (O,i,j) et $M(X;Y)$ dans $(\Omega;i;j)$.

$$\begin{cases} x=a+X \\ y=a+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x-a \\ Y=y-a \end{cases}$$

Et enfin, on vérifie que : $f(-X)=f(X)$ donc f est paire et la courbe représentative de F est symétrique par rapport à (Ω, j).

CENTRE DE SYMÉTRIE $A(a,b)$ **avec** a et $b\in IR$

Pour montrer qu'une fonction admet le point A comme centre de symétrie, il existe 3 méthodes:

- On vérifie que pour tout x de D_f, (2a-x) est dans D_f, puis que : $f(2a-x)+f(x)=2b$.
- On vérifie que pour tout réel h ,tel que (a-h) est dans D_f et (a+h) est dans D_f, puis que $f(a-h)+f(a+h)=2b$.
- On utilise le changement de repère: il s'agit de montrer que C_f est la courbe représentative d'une fonction f impaire dans le repère $(\Omega;i;j)$, Ω ayant pour coordonnées (a;b) dans le repère (O,i,j) .f vérifie alors $Y=f(X)$.

Pour $M(x;y)$ dans (O,i,j) et $M(X;Y)$ dans $(\Omega;i;j)$.

$$\begin{cases} x=a+X \\ y=a+Y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X=x-a \\ Y=y-a \end{cases}$$

On obtient les formules suivantes de changement de repère :

Et enfin, on vérifie que : $f(-X)=-f(X)$. donc f est impaire et, origine du nouveau repère, est centre de symétrie de la courbe représentative de f.

3- VARIATIONS D'UNE FONCTION

Définition 1 :

Soit une fonction f définie sur un intervalle I, soit a et b deux éléments de I tels que a < b.

- f est croissante (respectivement strictement croissante)sur I si et seulement si f(a) £ f(b) (respectivement si f(a) < f(b)).
- f est décroissante sur I (respectivement strictement décroissante) si et seulement si f(a) ³ f(b) (respectivement si f(a) > f(b)).

Tableau de variation

→ Le tableau de variation d'une fonction

On résume les variations d'une fonction dans un tableau de variation.

La première ligne du tableau donne les intervalles de l'ensemble de définition de la fonction.

On y fait figurer en particulier les valeurs de x au passage desquelles le sens de variation de f change.
La deuxième ligne représente le sens de variation de la fonction :
- une flèche ↗ correspond à une croissance stricte,
- une flèche ↘ correspond à une décroissance stricte,
- une flèche → correspond à un intervalle sur lequel la fonction est constante,

le symbole ‖ signifie que la fonction n'est pas définie pour la valeur correspondante.

Quelques points importants à retenir :

Une flèche oblique dans le tableau de variation de f indique par convention :
- La stricte monotonie de f sur l'intervalle correspondant : croissance stricte (si la flèche est vers le haut) ou décroissance stricte (si la flèche est vers le bas).
- La continuité de la courbe de f, sans rupture sur cet intervalle.

Remarque :

la distinction entre inégalité stricte et large est fondamentale ici pour bien distinguer une fonction croissante (ou décroissante) d'une fonction strictement croissante (ou décroissante). En effet, une fonction croissante et non strictement croissante peut être constante.
Conclusion : étudier le sens de variation d'une fonction, c'est donc déterminer, lorsqu'ils existent, les plus grands intervalles sur lesquels cette fonction est croissante ou décroissante.

Définition 2 :

Soit une fonction définie sur un intervalle J. f est monotone sur J si et seulement si f est croissante ou décroissante sur J en entier.
Le tableau de variation d'une fonction rassemble les données et les propriétés d'une fonction. En particulier, il fait apparaître

- *l'ensemble de définition de la fonction*
- *la parité de la fonction (cf plus bas)*
- *les variations de la fonction (croissance, décroissance)*
- *les valeurs remarquables de la fonction*

Soit f une fonction définie sur [-4 ; 4], paire, croissante sur [-4 ; 4], avec f(0) = 6 et f(-4) = f(4) = -1
On va résumer l'ensemble de ces informations dans le tableau de variation de f

x	-4		0		4
$f(x)$			2		
		↗		↘	
	-1				-1

Quelques points importants à retenir :

Une flèche oblique dans le tableau de variation de f indique par convention :
- La stricte monotonie de f sur l'intervalle correspondant : croissance stricte (si la flèche est vers le haut) ou décroissance stricte (si la flèche est vers le bas).
- La continuité de la courbe de f, sans rupture sur cet intervalle.

4 MAXIMUM ET MINIMUM D'UNE FONCTION

Extrema **→ *Extrema d'une fonction***

- *Le maximum M d'une fonction f sur un intervalle I est la plus grande valeur de f(x) pour x variant dans I.*
- *Le minimum m d'une fonction f sur un intervalle I est la plus petite valeur de f(x) pour x variant dans I.*
- *Un extremum est un maximum ou un minimum.*

Définition :

Soit f une fonction dont l'ensemble de définition est D et I un intervalle de D.

- *On dit que f admet un maximum en a sur I si, pour tout x de I :* $f(x) \leq f(a)$.
  f(a) est ce maximum.
- *On dit que f admet un minimum en b sur I tel que, si pour tout x de I :* $f(x) \geq f(b)$.
  f(b) est ce minimum.

5- Fonction composée:

1) *Définition :*

f et g sont deux fonctions numériques , on appelle fonction composée de f suivie de g , la fonction numérique notée gof "on lit g rond f " et définie par l'expression : (gof)(x)=f(g(x))

Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur f(I).

La fonction $g \circ f$ *(on dit "g rond f")est la fonction définie aussi sur le domaine I par :*

$(g \circ f)(x) = g[f(x)]$

En fait, on remplace la variable de la fonction g par la fonction f.

EXEMPLE

Soient deux fonctions : $f(x) = x+1$ *et* $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

Si on veut $g \circ f$ *:* $(g \circ f)(x) = 3(x+1)^2 - 2(x+1) + 1$

Vous avez saisie l'idée ?

Je vous laisse terminer le calcul.

PROPRIÉTÉS

Composition et variations de fonctions

Soient f une fonction définie sur I et g une fonction définie sur f(I).

- *Si f et g ont le même sens de variation, alors* $g \circ f$ *est croissante,*
- *Si f et g ont des sens de variation opposés, alors* $g \circ f$ *est décroissante.*

SENS DE VARIATION : OPÉRATION ET COMPOSITION

Voici un tableau à connaître par cœur :

f	*g*	*Opération*	
Croissante		$k \times f \quad (k \in IR)$	*Décroissante si k < 0* *Croissante si k > 0*
Décroissante		$k \times f \quad (k \in IR)$	*Décroissante si k >0* *Croissante si k < 0*
Croissante	*Croissante*	$f + g$	*Croissante*
Décroissante	*Décroissante*	$f + g$	*Décroissante*
Croissante	*Croissante*	$f.g$ avec $f \geq 0$ et $g \geq 0$	*Croissante*
Décroissante	*Décroissante*	$f.g$ avec $f \geq 0$ et $g \geq 0$	*Décroissante*
Croissante sur E	*Croissante sur E'* avec $E' \subset E$	*gof*	*Croissante*
Croissante sur E	*Décroissante sur E'* avec $E' \subset E$	*gof*	*Décroissante*
Décroissante sur E	*Croissante sur E'* avec $E' \subset E$	*gof*	*Décroissante*
Décroissante sur E	*Décroissante sur E'* avec $E' \subset E$	*gof*	*Croissante*

Toutes ces notions sur les opérations de fonction vont vous aider à étudier les variations des fonctions.
Vous pourrez considérer que la fonction à étudier est une somme, un produit, un quotient de deux fonctions, ou alors une fonction multiplier par un coefficient (k rappelez-vous). Vous utiliserez ainsi les propriétés que vous venez d'apprendre.

Remarque sur les compositions de fonction

- *pour obtenir l'expression de gof, il faut exprimer en premier g(x) en fonction de x, puis remplacer x par l'expression de f(x).*
- *en général, gof est différent de fog, d'où la nécessité de faire attention à l'ordre des calculs.*

Quelques remarques sur les fonctions majorées

- *si un majorant M est donné par l'énoncé, étudier directement le signe de M-f(x).*
- *Attention, il ne faut pas confondre un maximum et un majorant.*
- *le tableau de variation donne souvent des informations importantes.*

Position relative de deux courbes et intersection

Les abscisses des points de la courbe Cf situées au-dessus de Cg vérifient $f(x) > g(x)$ *. A retenir : Et inversement, les solutions de* $f(x) < g(x)$ *sont les abscisses des points de Cf situées au-dessous de Cg .*

Exercice 1

Donner les ensembles de définition des fonctions suivantes :

1. $x \mapsto \sqrt{2x^2 - 12x + 18}$
2. $\sqrt{\dfrac{8-16x}{(7+x)^2}}$

ETUDE DE FONCTIONS – FONCTIONS COMPOSEES

Exercice 1 : Calcul de composées

Soit f la fonction définie par : $f(x) = x^2 - 3$

Soit g la fonction définie sur par : $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$

1. *Déterminer les ensembles de définition de g et de f.*
2. *Déterminer par la méthode de votre choix les sens de variation de f et de g. (Citez les théorèmes utilisés)*

Rappel *:*
Par définition (fog)(x) = f[g(x)] donc pour que cette fonction soit définie il faut :
- *que* $x \in D_g$ *(ensemble de définition de g)*
- *et que* $g(x) \in D_f$ *(ensemble de définition de f)*

3. *Etude de fog*
   a. *Déterminons l'ensemble de définition de fog c'est-à-dire de la fonction :* $x \to f\left[g(x)\right]$

Il faut donc écrire que fog est définie pour les réels x tels que : $\begin{cases} x \in D_g \\ g(x) \in D_f \end{cases}$

Cela équivaut à $\begin{cases} x \in \cdots (condition 1) \\ \dfrac{1}{x+1} \in \cdots (condition 2) \end{cases}$

Vérifier chacune des conditions et déterminer l'ensemble de définition de fog.

   b. *Ecrire alors l'expression de fog pour* $x \in D_{fog}$

4. *Etude de gof*
   a. *Déterminons l'ensemble de définition de gof c'est-à-dire de la fonction :* $x \to g\left[f(x)\right]$

Il faut donc écrire que gof est définie pour les réels x tels que : $\begin{cases} x \in D_f \\ f(x) \in D_g \end{cases}$

Cela équivaut à : $\begin{cases} x \in \cdots (condition 3) \\ x^2 - 3 \in \cdots (condition 4) \end{cases}$

i.Trouver les valeurs pour lesquelles la condition (4) n'est pas vérifiée.

ii.En déduire l'ensemble de définition de gof (que l'on note D_{gof} *)*

b. *Ecrire alors l'expression de fog pour :* $x \in D_{fog}$

<u>Exercice 2 : Déterminer un sens de variation</u>

1. *Déterminer le sens de variation de f définie sur* $]-3\,;+\infty[$ *par :* $f(x) = \frac{1}{x+3}$
2. *Soit g la fonction définie sur* $]-3\,;+\infty[$ *par :* $g(x) = \frac{x+1}{x+3}$

   a. *Démontrer qu'il existe des réels a et b tels que :* $g(x) = a + \frac{b}{x+3}$ *g(x) sur Dg*

   b. *En déduire le sens de variation de g*

   c. *Par quelle transformation passe-t-on du graphe de la fonction h :* $x \to -\frac{2}{x}$ *à celui de g ?*