



Exercice 1

On considère l'application $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{2x}{x^2 + 1}$

1) Vérifier que f est ni injective, ni surjective

2) Montrer que $f(\mathbb{R}) = [-1, 1]$

3) Montrer que l'application $g : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1]$
 $x \rightarrow f(x)$ est une bijection

Exercice 2

On considère l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow x + \sqrt{x^2 + 1}$

Montrer que f est injective et non surjective.

Exercice 3

Soit l'application : $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $(x, y) \rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{y}$

1) Montrer que f est non injective.

Montrer que f est surjective.

Exercice 4

On considère l'application : $f :]-\infty, 0] \rightarrow [-1, 2[$
 $x \rightarrow \frac{2x^2 - 1}{x^2 + 1}$

Montrer que f est une bijection et déterminer la bijection réciproque f^{-1}

Exercice 5

On considère l'application : $f : [1, +\infty[\rightarrow]0, \sqrt{3}]$
 $x \rightarrow \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1}$

Montrer que f est une bijection et déterminer la bijection réciproque f^{-1}

Exercice 6

Soit l'application : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$
 $(x, y) \rightarrow |3x - 2y|$

Montrer que f est surjective et non injective.

Exercice 7

Soit l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \rightarrow x(1 + |x|)$

Montrer que f est une bijection et déterminer la bijection réciproque f^{-1} .

Exercice 8

Soit l'application : $f : [-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto 2\sqrt{x+1} - x$

1) a/ Vérifier que : $(\forall x \in [-1, +\infty[) \quad 2 - f(x) = (\sqrt{x+1} - 1)^2$.

b/ En déduire que f n'est pas surjective.

2) a/ Résoudre dans l'intervalle $[-1, +\infty[$ l'équation $f(x) = 1$.

b/ f est-elle injective?

3) Soit l'application : $g : [0, +\infty[\rightarrow]-\infty, 2]$
 $x \mapsto 2\sqrt{x+1} - x$

Montrer que g est une bijection et déterminer la bijection réciproque g^{-1} .

Exercice 9

Montrer qu'il n'existe pas d'application injective définie de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$(\forall x \in \mathbb{R}) : f^2(x) - 8f(x^2) + 16 = 0$$

Exercice 10

Soient les deux applications $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Montrer que :

(1) $g \circ f$ injective $\Rightarrow f$ injective

(2) $g \circ f$ surjective $\Rightarrow g$ surjective

Exercice 11

Soit l'application : $f : \mathbb{Z} \times [0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$
 $(n, x) \mapsto n + x$

Montrer que f est injective.

Exercice 12

Soit $f : E \rightarrow F$ une application.

Montrer que : f est injective si et seulement si $\forall A \in \mathcal{P}(E), \forall B \in \mathcal{P}(F), f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$