



Exercice 1 (3pts)

Montres que :

-) $\left(\forall (x; y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \right) ; x \neq y \Rightarrow \sqrt{x} + \sqrt{x+1} \neq \sqrt{y} + \sqrt{y+1}$
-) $\left(\forall n \in \mathbb{N}^* \right) ; \frac{1^2}{1 \times 3} + \frac{2^2}{3 \times 5} + \frac{3^2}{5 \times 7} + \dots + \frac{n^2}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

Exercice 2 (3pts)

Déterminer en extension les ensembles suivants :

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z}^* / \frac{2x-11}{x} \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$B = \left\{ (x; y) \in \mathbb{N}^2 / x^2 + xy - 2y^2 = 4 \right\}$$

$$A = \left\{ x \in \mathbb{Z} / -1 \leq x^2 - 2x \leq 3 \right\}$$

Exercice 3 (3pts)

on considère l'ensemble $E = \left\{ \frac{\sqrt{x}}{x+1} ; x \in \mathbb{R}^+ \right\}$

1 – Vérifier que : $1 \notin E$ et que : $E \neq \emptyset$

2- Montrer que $E \subset \left[0; \frac{1}{2} \right]$

3- a - Montrer que : $\forall y \in \left[0; \frac{1}{2} \right] ; \left(\exists x \in \mathbb{R}_+^* \right) / y = \frac{\sqrt{x}}{x+1}$

b- En déduire que : $E = \left[0; \frac{1}{2} \right]$

Exercice 4 (5pts)

On considère l'application : $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $x \mapsto x^2 - x + 1$

1- a- Déterminer : $f^{-1}(\{0\})$ et $f^{-1}(\{1\})$.

b- f est-elle injective? justifier votre réponse

2- a- Montrer que : $f(x) \geq \frac{3}{4} ; (\forall x \in \mathbb{R})$.

b- f est-elle surjective? Justifier

3 - Montrer que : $f(\mathbb{R}) \subset \left[\frac{3}{4}; +\infty \right[$

4- On considère l'application : $g : \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[\rightarrow \left[\frac{3}{4}; +\infty \right[$
 $x \mapsto f(x)$

Montrer que g est bijective