Devoir surveillé N2 — **2BAC – PC**

Exercice 1 : (13,5 pts)

On considère la fonction numérique f définie par : $f(x)=x\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}$

et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1pt 1) a- Vérifier que le domaine de définition de la fonction f est $]-\infty,0]\cup]1,+\infty[$

2pts b- Calculer : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

1,5pt c- Calculer $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

1,5pt 2) Étudier la dérivabilité de f à gauche en 0 et interpréter géométriquement le résultat.

1,5pt 3) a- Démontrer que : $(\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[)\quad f'(x)=\dfrac{x(2x-3)}{2\sqrt{x(x-1)^3}}$

1,5pt b- Donner le tableau de variation de la fonction f

1,5pt 4) a- Montrer que $(\forall x\in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[)$: $f(x)-x=\dfrac{\dfrac{x}{x-1}}{\sqrt{\dfrac{x}{x-1}}+1}$

1,5pt b- En déduire que la droite (Δ) d'équation $y=x+\dfrac{1}{2}$ est asymptote à la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$ et $-\infty$.

1,5pt 5) Construire la courbe (C_f)

Exercice 2 : (6,5 pts)

On considère la suite numérique (u_n) définie par :

$$u_0=1,\quad (\forall n\in\mathbb{N}):\quad u_{n+1}=\sqrt{3u_n}$$

1pt 1) Montrer que : $(\forall n\in\mathbb{N})$: $0\le u_n\le 3$

1pt 2) a- Montrer que la suite (u_n) est croissante.

0,5pt b- En déduire que la suite (u_n) est convergente .

1pt 3) a- Montrer que $(\forall n\in\mathbb{N}):\dfrac{3}{3+\sqrt{3u_n}}<\dfrac{2}{3}$

1pt b- En déduire que : $(\forall n\in\mathbb{N}):3-u_{n+1}\le\dfrac{2}{3}(3-u_n)$

1pt 4) a- Montrer par récurrence que : $(\forall n\in\mathbb{N}):3-u_n\le\left(\dfrac{2}{3}\right)^n\times 2$

1pt b- En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.