GROUPE SCOLAIR LA RESIDENCE Gestionnaire délégué de l'IP	المملكة المغربية وزارة التربية الوطنية والتعليم الأولي والرياضة	**Année scolaire :** **2023/24**

Durée : 4 heures **Coefficient : 9**	# Simili de mathématiques	**Niveau : 2e Année du Baccalauréat** **filière : Sciences mathématiques**

Instructions générales

* L'utilisation de la calculatrice n'est pas autorisée.

* Le candidat peut traiter les exercices de l'épreuve suivant l'ordre qui lui convient

* L'utilisation de la couleur rouge lors de la rédaction des solutions est à éviter

* Écrire **lisiblement** et vérifier que le sujet est complet : il comporte 4 pages numérotées de 1 à 4, celle-ci comprise.

Composantes de l'épreuve

L'épreuve est composée de trois exercices est un problème indépendants entre eux et répartis suivants les domaines :

Exercice 1	Les nombres complexes	3.75 points
Exercice 2	L'arithmétique	3.25 points
Exercice 3	Les structures algébriques	3 points
Problème	Analyse : Étude de fonctions-Les suites- Calcul intégral	10 points

ln : désigne le logarithme népérien et e la base du logarithme népérien.

Exercice1 (3.75 points)

Soit m un nombre complexe. On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation :

(E) $\quad z^3+(2-i)z^2+(m^2+1-2i)z-i(m^2+1)=0$

Le plan complexe est muni du repère orthonormé direct $(O;\overrightarrow{u};\overrightarrow{v})$.

0.25pts I)1- a) Vérifier que $z_0=i$ est solution de l'équation (E).

0.5pts b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

0.5pts 2- Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que au moins deux solutions de l'équation (E) aient même module.

0.5pts 3- On pose : $z_1=-1+im$; $z_2=-1-im$ et on suppose $m=e^{i\theta}$ avec $\pi<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$

Ecrire z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

II) On considère les points M_1 ; M_2 et M d'affixe respectivement z_1 ; z_2 et m.

0.5pts 1- Déterminer l'ensemble des points $M(m)$ pour que M_1 ; M_2 et M soient alignés.

2- On suppose $m\overline{m}+\mathcal{R}e(m)\neq 0$.

Soit $\mathcal{R}$ l'application qui transforme $N(z)$ au point $N'(z')$ telle que : $z'=-1+iz$.

0.5pts a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une rotation dont on précisera son centre Ω et une mesure de son angle.

0.5pts b) Montrer que $\dfrac{z_2-m}{z_2-z_1}$ est imaginaire pur $\Longleftrightarrow \quad m\overline{m}-\mathcal{I}m(m)=0$

0.5pts c) En déduire l'ensemble des points $M(m)$ tel que M_2 ; M_1 ; M et Ω est cocyclique.

Exercice2 (3.25 points)

1- On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation : (E) : $23x-48y=1$

0.25pts a) Montrer que l'équation (E) admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$

0.5pts b) Déterminer une solution particulière de (E) en utilisant l'algorithme d'Euclide.

0.25pts c) Montrer que l'ensemble solution de (E) est $S=\{(-25+48k;-12+23k)\setminus k\in\mathbb{Z}\}$

2- On considère dans $\mathbb{N}$ le système (S) : $\begin{cases} n\equiv 8[23] \\ n\equiv 9[48] \end{cases}$

0.75pts Montrer que : $n\equiv 537\,[1104]\Longleftrightarrow n$ solution du système (S)

(On remarque que $(1104=48\times 23)$)

3- Soit a et b deux nombres entiers naturels.

0.25pts a) Vérifier que : $(23)^2\equiv 1\,[48]$

0.5pts b) Montrer que : $(a^{23}\equiv b\,[91] \quad et \quad a^{48}\equiv 1\,[91])\Longrightarrow b^{23}\equiv a\,[91]$

0.75pts 4- Déterminer en utilisant le théorème de Fermat le reste de la division de 3^{48} sur 91.

Exercice3 (3 points)

On rappel que l'ensemble $(M_3(\mathbb{R}); +; \times)$ est un anneau unitaire.

On considère l'ensemble $G = \left\{ M_\theta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & cos(\theta) & -sin(\theta) \\ 0 & sin(\theta) & cos(\theta) \end{pmatrix} \quad | \quad \theta \in \mathbb{R} \right\}$

0.5pts 1- Montrer que G est une partie stable par rapport à la multiplication des matrices dans l'ensemble $M_3(\mathbb{R})$.

0.5pts 2- On considère l'ensemble : $\mathcal{U} = \{z \in \mathbb{C} / |z| = 1\}$

Montrer que $(\mathcal{U}; \times)$ est un sous groupe de $(\mathbb{C}^*; \times)$

3- On considère l'application Φ définie de $\mathcal{U}$ vers G par $\Phi(e^{i\theta}) = M_\theta$

0.5pts a) Montrer que Φ est un isomorphisme de $(\mathcal{U}; \times)$ vers $(G; \times)$

0.5pts b) En déduire que $(G; \times)$ est un groupe commutatif.

1pts 4- Calculer $(M_\theta)^{-1}$ puis $(M_\theta)^n$ tel que n un nombre entier relatif non nul .

Problème (10 points)

Partie I (6.75 points)

On considère la fonction f définie sur $[0; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{x - \ln x} & x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

(C_f) la courbe représentative de f dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

0.5pts 1- a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : x - \ln x > 0$

0.25pts b) Montrer que f est continue à droite en 0

0.5pts c) Étudier la dérivabilité de f à droite en 0

0.5pts 2- Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et donner une interprétation graphique du résultat.

0.5pts 3- a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[) : f'(x) = \left(\dfrac{1-x}{x}\right)(f(x))^2$

0.5pts b) Dresser le tableau de variations de f.

4- Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

0.5pts a) Montrer que l'équation $f(x) = \dfrac{1}{n}$ admet dans $[0; +\infty[$ exactement deux solutions distinctes α_n et β_n tel que $0 < \alpha_n \leq 1 < \beta_n$

0.5pts b) Montrer que $(\forall n \geq 2)$ on a $\beta_n > n$ puis en déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} \beta_n$

0.5pts c) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \geq 2}$ est décroissante puis en déduire qu'elle est convergente.

0.5pts d) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} \alpha_n = 0$ et calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln \alpha_n}{n}$

5- Soit g la restriction de f sur l'intervalle $[1; +\infty[$ et (C_g) sa courbe représentative dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0.25pts a) Montrer que la fonction g admet une réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J que l'on précisera.

0.25pts b) Montrer que : $(g^{-1})'(\frac{1}{n}) = \frac{n^2\beta_n}{1-\beta_n}$

6- On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = \frac{e^x}{1+xe^x}$

et (C_h) sa courbe représentative dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

0.25pts a) Montrer que la fonction h est le composée de la fonction f et la fonction $x \longrightarrow e^{-x}$

0.5pts b) En déduire le tableau de variations de h en utilisant les propriétés du composée de deux fonctions

0.75pts 7- Tracer les courbes (C_f) ; (C_g) et (C_h) dans le repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Partie II (3.25 points)

On considère la fonction F définie sur $[0;+\infty[$ par : $\begin{cases} F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,\mathrm{d}t & x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$

0.5pts 1- a) Montrer que : $(\forall x \in]0;\frac{1}{2}[)$; $(\exists c \in]x;2x[)$ tel que $F(x) = \frac{x}{c - \ln c}$

0.25pts b) Montrer que F est dérivable à droite en 0 (Remarquer que f est croissante sur $[0;1]$

0.25pts 2- a) Montrer que $\forall x \geq 1$; $F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{t}\right) f(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{2x} \frac{1}{t} f(t)\,\mathrm{d}t$

0.25pts b) Montrer que $\forall x \geq 1$ on a : $\frac{\ln 2}{2x - \ln 2x} \leq \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{t} f(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{\ln 2}{x - \ln x}$

0.25pts c) Montrer que $\forall x \geq 1$ on a : $\displaystyle\int_x^{2x} \left(1 - \frac{1}{t}\right) f(t)\,\mathrm{d}t = \ln\left(1 + \frac{x - \ln 2}{x - \ln x}\right)$

0.25pts d) En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x)$

0.75pts 3- Montrer que F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que $\forall x \in]0;+\infty[$ on a :

$$F'(x) = \frac{\ln(2) - \ln(x)}{(2x - \ln(2x))(x - \ln(x))}$$

0.75pts 4- Soit $k \in]0;+\infty[$ on désigne par $\mathcal{A}(k)$ l'aire du domaine du plan délimité par la courbe (C_f) l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = k$ et $x = 2k$

Pour quelle valeur de k la valeur de l'aire $\mathcal{A}(k)$ est maximale ?

Fin de l'épreuve