

Exercice 1 (14 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x^2} & ; \text{ si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\arctan(x)}{x} & ; \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

et (C_f) la Courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

1) Montrer que f est continue en 0 .

2) Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

3) En utilisant le théorème des accroissements finis; montrer que: $(\forall x \in]-\infty; 0[)$;

$$x < \arctan(x) < \frac{x}{1+x^2}$$

4) Etudier la dérivabilité de f en 0 ; puis donner une interprétation géométrique au résultat obtenu.

5) a) Montrer pour tout $x \in]0; +\infty[$; $f'(x) = \frac{(\sqrt[3]{x}-1)(3\sqrt[3]{x}+1)}{3\sqrt[3]{x^2}}$

b) Montrer que f est croissante sur $] -\infty; 0[$ puis dresser son tableau de variation sur $\mathbb{R}$.

6) étudier les branches infinies de (C_f) ; puis Construire (C_f) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

7) Soit g la restriction de f sur $[1; +\infty[$

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Calculer $g(8)$; puis montrer que g^{-1} est dérivable en 3 et calculer $(g^{-1})'(3)$.

8) On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $h(x) = \frac{1}{3} f(x) + \frac{2}{3} - f\left(\frac{x}{3}\right) - \frac{x^2}{9} A$

où A est un réel qui vérifie $h(1) = 0$.

a) En utilisant le théorème de Rolle, montrer que: $(\exists c \in]0; 1[) / f'(c) - f'\left(\frac{c}{3}\right) = \frac{2}{3} cA$.

b) En utilisant le théorème des accroissements finis ; déduire que : $(\exists b \in]0; 1[) ; / f''(b) = A$.

Exercice 2 (6pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \arctan(1+x)$

1) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, el que : $1 < \alpha < 2$

2) Montrer que : $(\forall x \in [1; 2]) ; |f'(x)| \leq \frac{1}{5}$.

3) Soit (u_n) la suite définie par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$

- a) Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 < u_n < 2$; puis déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{5} |u_n - \alpha|$.
- b) Déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

WWW.GUESSMATHS.CO