



Cours CALCUL TRIGONOMETRIQUE ET EXERCICES AVEC SOLUTIONS

1BAC SM BIOF

Formules de transformations

RAPPELLE

1) Cercle trigonométrique

Définition :

Le cercle trigonométrique est un cercle de centre O l'origine du plan de rayon $R=1$ orienté une orientation positive et admet une origine I .

2) Les abscisses curvilignes

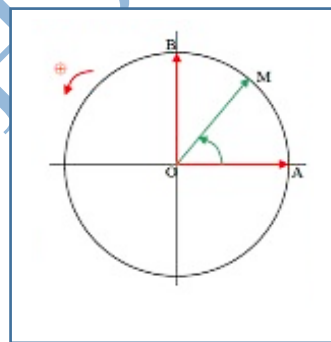
1.1 L'abscisse curviligne principale d'un point sur le Cercle Trigonométrique

Soit (C) le cercle trigonométrique d'origine I ; considérons l'intervalle $]-\pi; \pi]$ tel que 0 l'abscisse de I sur l'axe perpendiculaire sur (OI) .

Si on fait enrouler le segment qui représente $]-\pi; \pi]$ au tour du cercle (C) on remarque que chaque point N d'abscisse α de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ s'associe avec un point unique M du cercle trigonométrique.

Le réel α s'appelle l'abscisse curviligne principale du point M et inversement si α est un réel de l'intervalle $]-\pi; \pi]$ alors il existe un point M unique de (C) qui s'associe avec le point $N(\alpha)$

Le réel α représente aussi la mesure de l'angle géométrique centrique IOM .



1.2 Les abscisses curvilignes d'un point sur le cercle trigonométrique

Considérons le cercle trigonométrique (C) d'origine I . (Δ) est la droite passant par et perpendiculaire à (OI) et d'unité égale à OJ .

Soit M un point sur le cercle (C) et d'abscisse Curviligne principale α .

Si on suppose que la droite (Δ) est un fil qu'on peut enrouler autour du cercle (C)

On remarque que le point M du cercle (C) coïncide avec une infinité de points de la droite (Δ) , et qui ont pour abscisses $\alpha - 6\pi$; $\alpha - 4\pi$; $\alpha - 2\pi$; $\alpha + 2\pi$; $\alpha + 4\pi$

En générale : chaque point $N(k)$ de la droite (Δ) qui coïncidera avec le point M aura pour abscisse $\alpha + k2\pi$.

Ces réels s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle (C) .

Définition :

Soit M un point sur le cercle (C) et d'abscisse Curviligne principale α . Les réels qui s'écrivent de la forme : $\alpha + k2\pi$ ou k est un entier relatif s'appellent les abscisses curvilignes du point M sur le cercle (C) .

CONSEQUENCES.

Formules de l'addition

Activité:

Soit M et N deux points sur le cercle trigonométrique d'abscisses curvilignes respectifs x et y.

1-Calculer $\overrightarrow{OM} \cdot \overrightarrow{ON}$ de deux façons différentes.

2-En déduire $\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y$

3-Calculer $\cos(x + y)$ en fonction des valeurs trigonométriques de x et de y

4-Calculer $\sin(x + y)$ et $\sin(x - y)$ en fonction des

Valeurs trigonométriques de x et de y.

Propriété 1:

Pour tous réels x et y on a

$$\cos(x - y) = \cos x \cdot \cos y + \sin x \cdot \sin y \quad (1)$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y \quad (2)$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cdot \cos y + \cos x \cdot \sin y \quad (3)$$

$$\sin(x - y) = \sin x \cdot \cos y - \cos x \cdot \sin y \quad (4)$$

Exemple :

1) Calculer $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

2) Calculer $\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)$

3) Calculer $\cos x = \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$.

4) montrer que: $\sin\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(x - \frac{2\pi}{3}\right) + \sin x = 0$

Solution

1) ■ $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

■ $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)$

$$= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\begin{aligned}
 2) \blacksquare \cos\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \\
 \blacksquare \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right) &= \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}
 \end{aligned}$$

Exercice 1

Soient: $0 < a < \frac{\pi}{2}$ et $0 < b < \frac{\pi}{2}$ tels que : $\cos a = \sin b = \frac{1}{2}$

1) Calculer: $\sin a$ et $\cos b$

2) Calculer : $\sin(a+b)$

Solution:

Calcul de $\cos b$

On a: $\cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \cos^2 b = 1 - \sin^2 b$

$$\Leftrightarrow \cos^2 b = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 b = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos b = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos b = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Or $0 < b < \frac{\pi}{2}$; donc : $\cos b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

Calcul de: $\sin a$

On a: $\cos^2 b + \sin^2 b = 1 \Leftrightarrow \sin^2 b = 1 - \cos^2 b$

$$\Leftrightarrow \sin^2 b = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 b = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \sin b = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \sin b = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

Or $0 < a < \frac{\pi}{2}$; donc : $\sin b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

2) on a: $\sin(a+b) = \sin a \cdot \cos b + \cos a \cdot \sin b$

$$\text{Donc: } \sin(a+b) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Exercice2 :

Calculer $\cos\left(\frac{11\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{11\pi}{12}\right)$.

Formules d'angle double.

D'après propriété 1 ligne (2) on a :

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos(x+x) \\ &= \cos x \cdot \cos x - \sin x \cdot \sin x \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x\end{aligned}$$

et on sait que : $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$

$$\text{Donc } \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1 \text{ ou } \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

D'après Propriété 1 ligne (3) on a : $\sin(2x) = \sin(x+x) = \sin x \cdot \cos x + \cos x \cdot \sin x$

$$\text{Donc } \sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$

Propriété 2:

Pour tout réel x on a :

$$\blacksquare \cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$$

$$\blacksquare \cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\blacksquare \sin(2x) = 2\sin x \cdot \cos x$$

Exemple :

Calculer $\cos\frac{\pi}{8}$ et $\sin\frac{\pi}{8}$

Solution:

$$\text{On a : } \frac{\pi}{4} = 2 \times \frac{\pi}{8} \text{ donc } \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(2 \times \frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{8} - 1$$

$$\text{D'où } \cos^2\frac{\pi}{8} = \frac{\cos\frac{\pi}{4} + 1}{2} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + 1}{2} = \frac{\sqrt{2} + 2}{4}$$

$$\text{On a donc : } \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2} \text{ ou } \cos\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2} ; \text{ or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ càd : } \cos\frac{\pi}{8} > 0$$

$$\text{Donc : } \cos\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{\sqrt{2} + 2}}{2}$$

D'après la formule : $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$

$$\text{On a Donc : } \sin^2\frac{\pi}{8} = \frac{1 - \cos\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} = \frac{2 - \sqrt{2}}{4}$$

$$\sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} \text{ ou } \sin\frac{\pi}{8} = -\frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2} ; \text{ or } 0 < \frac{\pi}{8} < \frac{\pi}{2} \text{ càd : } \sin\frac{\pi}{8} > 0$$

$$\text{Donc : } \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2 - \sqrt{2}}}{2}$$

Exercice 3:

Sachant que : $\sin x = \frac{1}{3}$ et $0 < x < \frac{\pi}{2}$

Calculer $\cos(2x)$ et $\sin(2x)$

Solution:

On a: $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2 x$; donc: $\cos(2x) = 1 - 2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}$

Et on a: $\sin^2(2x) + \cos^2(2x) = 1$; donc: $\sin(2x) = \pm \sqrt{1 - \cos^2(2x)}$

Or $0 < x < \frac{\pi}{2}$; d'où $\sin(2x) = \sqrt{1 - \left(\frac{7}{9}\right)^2} = \sqrt{1 - \frac{49}{81}} = \sqrt{\frac{81 - 49}{81}} = \sqrt{\frac{32}{81}} = \frac{2\sqrt{8}}{9}$.

On peut utiliser la formule $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$; mais il faut calculer $\cos x$.

Exercice 4 :

Montrer que: $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$; $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$.

Solution:

$$\begin{aligned} \frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} &= \frac{\sin 3x \cos x - \sin x \cos 3x}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin(3x - x)}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{\sin(2x)}{\sin x \cos x} \\ &= \frac{2 \sin x \cos x}{\sin x \cos x} \end{aligned}$$

Donc : $\forall x \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[$; $\frac{\sin 3x}{\sin x} - \frac{\cos 3x}{\cos x} = 2$

Formules du demi-angle.

D'après propriété 2 ligne (1) et (2) on a:

Propriété 3 :

Pour tous réels x et y on a:

$$\blacksquare \cos^2 x = \frac{1 + \cos(2x)}{2} \quad (1)$$

$$\blacksquare \sin^2 x = \frac{1 - \cos(2x)}{2} \quad (2)$$

D'après propriété 2

Propriété 4:

$$\blacksquare \cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1 \quad (1)$$

$$\blacksquare \cos x = 1 - 2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right) \quad (2)$$

$$\blacksquare \sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3)$$

Exemple :

Montrer que :

$$1) 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$2) \text{ si } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et } \sin \alpha \neq -1 ; \text{ alors : } \frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Solution

$$1) \text{ On a : } 1 - \cos x + \sin x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right) \quad (\text{de (1) et (3)})$$
$$= 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \left(\sin\left(\frac{x}{2}\right) + \cos\left(\frac{x}{2}\right)\right)$$

$$2) \text{ On a : } 1 - \sin \alpha = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\text{Donc : } 1 - \sin \alpha = 2 \sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\right) \text{ et } 1 + \sin \alpha = 2 \cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\right)$$

$$\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\frac{\pi}{2} - \alpha}{2}\right)} = \frac{2 \sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)} = \tan^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Exercice 5

Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}$

$$1) \sin^2(2x) - \cos(2x) - 1 = -2\cos^2 x \times \cos(2x)$$

$$2) 2\sin^2 x + 12\cos^2 x = 5\cos(2x) + 7$$

Solution

$$1) \sin^2(2x) - \cos(2x) - 1 = (2 \sin x \cos x)^2 - 2\cos^2 x + 1 - 1$$
$$= 4\cos^2 x \sin^2 x - 2\cos^2 x$$
$$= 2\cos^2 x (\sin^2 x - 1)$$
$$= -2\cos^2 x \times \cos(2x)$$

$$2) 2\sin^2 x + 12\cos^2 x = 2\sin^2 x + 12(1 - \sin^2 x)$$
$$= -10\sin^2 x + 12$$
$$= 5(1 - 2\sin^2 x) + 7$$
$$= 5\cos(2x) + 7$$

4) Formules de la tangente

Soient x et y deux réels tels que : $(x + y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; on a :

$$\tan(x + y) = \frac{\sin(x + y)}{\cos(x + y)} = \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y}$$

Si $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; alors : $\cos x \cos y \neq 0$

$$\begin{aligned}\tan(x + y) &= \frac{\sin x \cos y + \cos x \sin y}{\cos x \cos y - \sin x \sin y} \\ &= \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}\end{aligned}$$

Si $x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$ et $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\text{On en déduit que : } \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$$

Si $x - y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$; $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

$$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y}$$

Propriété 5

Soient x et y deux réels tels que : $x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ on a :

$$1) \text{ si } (x + y) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; \text{ alors : } \tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y} \quad (1)$$

$$2) \text{ Si } x \neq \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2} ; \text{ alors : } \tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \quad (2)$$

$$3) \text{ Si } x - y \neq \frac{\pi}{2} + k\pi ; \text{ alors : } \tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \cdot \tan y} \quad (3)$$

Applications:

Calculer $\tan \frac{\pi}{12}$ et $\tan \frac{5\pi}{12}$

Solution

$$\blacksquare \tan \frac{\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan \frac{\pi}{6}}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} = 2 - \sqrt{3}$$

$$\blacksquare \tan \frac{5\pi}{12} = \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan \frac{\pi}{6}}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \cdot \tan \frac{\pi}{6}} = \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

Exercice6:

Calculer $\tan \frac{11\pi}{12}$

Exercice 7:

1- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^2 + 2x - 1 = 0$

2- En déduire $\tan \frac{\pi}{8}$.

Solution :

1) utiliser le déterminant A

2) utiliser: $\tan(2x) = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x}$ on remplaçant x par $\frac{\pi}{8}$

5) Les valeurs trigonométrique en fonction de : $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

1) D'après la propriété 5 (2) si $x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \pi + 2k\pi$; alors : $\tan(x) = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$; en posant

$t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; on déduit : $\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$

2) D'après la propriété 4 (1); $\cos x = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$ et on sait que : si $x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \pi + 2k\pi$; alors :

$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$; donc $\cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; on déduit : $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$

3) D'après la propriété 4 (3); $\sin x = 2\sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x}{2}\right)$ et on sait que : si $x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \pi + 2k\pi$;

alors : $\sin x = 2 \tan\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)$; d'où $\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; on déduit : $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$

Propriété 6 :

1) $\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$ (1)

2) $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$ (2)

3) si $x \neq \frac{\pi}{4} + k \frac{\pi}{2}$ et $x \neq \pi + 2k\pi$

$\tan x = \frac{2t}{1-t^2}$ (3)

Application:

Soit a un réel tel que : $\tan \frac{a}{2} = \sqrt{2}$.

Calculer $\cos a$; $\sin a$ et $\tan a$.

Solution:

$$\text{On a : } \blacksquare \cos a = \frac{1-t^2}{1+t^2} \text{ où } t = \tan\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } \cos a = \frac{1-\sqrt{2}^2}{1+\sqrt{2}^2} = -\frac{1}{3}$$

$$\blacksquare \sin a = \frac{2t}{1+t^2} \text{ où } t = \tan\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } \sin a = \frac{2\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\blacksquare \tan a = \frac{2t}{1-t^2} \text{ où } t = \tan\left(\frac{a}{2}\right) = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc : } \tan a = \frac{2\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}^2} = -2\sqrt{2}$$

Exercice 7:

1) Montrer que $\tan \frac{\pi}{12} = 2 - \sqrt{3}$.

2) Considérons l'équation (E) : $2\cos x - 2\sin x - 1 - \sqrt{3} = 0$

a) Vérifier que $\pi + 2k\pi$ n'est pas une solution de l'équation (E)

b) En posant $t = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$; résoudre l'équation (E) (remarquer que $4 - 2\sqrt{3} = (\sqrt{3} - 1)^2$)

3) Représenter les images des solutions de (E) sur le cercle trigonométrique.

6) Transformations des sommes en produits

De la propriété 1 et de (1) + (2) on peut conclure que :

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2\cos x \cos y$$

Si on pose : $x-y = p$ et $x+y = q$ alors on peut déduire : $x = \frac{p+q}{2}$ et $y = \frac{p-q}{2}$

On peut conclure que :

$$\blacksquare \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

De la propriété 1 et de (1) - (2) on peut conclure que

De la même façon on peut montrer les autres propriétés

Propriété 8

$$\blacksquare \cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\blacksquare \cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\blacksquare \sin(p) - \sin(q) = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

$$\blacksquare \sin(p) + \sin(q) = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Application:

Transformer en produits les expressions suivantes:

$$1) A(x) = \sin 2x + \sin 4x$$

$$2) B(x) = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \cos 4x$$

Solution:

$$1) A(x) = \sin 2x + \sin 4x$$

$$= 2 \sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right) \cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right)$$

$$= 2 \sin(3x) \cos(-x)$$

$$2) \text{ On a : } \blacksquare \cos x + \cos 2x = 2 \cos\left(\frac{3x+x}{2}\right) \cos\left(\frac{3x-x}{2}\right)$$

$$= 2 \cos(2x) \cos x$$

$$\blacksquare \cos 2x + \cos 4x = 2 \cos\left(\frac{4x+2x}{2}\right) \cos\left(\frac{4x-2x}{2}\right)$$

$$= 2 \cos(3x) \cos x$$

$$\text{Donc : } B(x) = 2 \cos(2x) \cos x + 2 \cos(3x) \cos x = 2 \cos x (\cos(2x) + \cos(3x))$$

$$\text{Et on a : } \cos(2x) + \cos(3x) = 2 \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x}{2}\right)$$

$$\text{Donc : } B(x) = 4 \cos x \cos\left(\frac{x}{2}\right) \cos\left(\frac{5x}{2}\right)$$

Exercice 9:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\sin x + \sin(3x) + \sin(5x) + \sin(7x) = 0$

8) Transformations des produits en sommes.

De la propriété 1 et de (1)+(2) on peut conclure que : $\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2 \cos x \cos y$

$$\text{D'où : } \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x-y) + \cos(x+y)]$$

De la même façon on peut montrer les autres égalités.

Propriété :

Pour tous réels x, y on a :

$$\blacksquare \cos x \cos y = \frac{1}{2} [\cos(x+y) + \cos(x-y)]$$

$$\blacksquare \sin x \sin y = -\frac{1}{2} [\cos(x+y) - \cos(x-y)]$$

$$\blacksquare \sin x \cos y = \frac{1}{2} [\sin(x+y) + \sin(x-y)]$$

La linéarisation d'une expression c'est de l'écrire sous la forme d'une somme.

Application:

Écrire sous la forme d'une somme

1) $\cos(2x) \times \sin(4x)$

2) $\sin x \times \sin(3x)$

3) $\cos(4x) \times \cos(6x)$

Solution:

$$\begin{aligned} 1) \cos(2x) \cdot \sin(4x) &= \frac{1}{2} [\sin(2x + 4x) + \sin(2x - 4x)] \\ &= \frac{1}{2} [\sin(6x) + \sin(-2x)] \\ &= \frac{1}{2} [\sin(6x) - \sin(2x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sin x \cdot \sin(3x) &= -\frac{1}{2} [\cos(x + 3x) - \cos(x - 3x)] \\ &= -\frac{1}{2} [\cos(4x) - \cos(-2x)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(2x) - \cos(4x)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \cos(4x) \cdot \cos(6x) &= \frac{1}{2} [\cos(4x + 6x) + \cos(4x - 6x)] \\ &= \frac{1}{2} [\cos(10x) + \cos(-2x)] \end{aligned}$$

Exercice 10:

1) $\cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$

2) $\sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12}$

Solution:

$$\begin{aligned} 1) \cos \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} &= \frac{1}{2} \left[\cos \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \cos \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\cos(\pi) + \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-1 + \frac{\sqrt{3}}{2} \right] \\ &= \frac{\sqrt{3} - 2}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \sin \frac{7\pi}{12} \times \cos \frac{5\pi}{12} &= \frac{1}{2} \left[\sin \left(\frac{7\pi}{12} + \frac{5\pi}{12} \right) + \sin \left(\frac{7\pi}{12} - \frac{5\pi}{12} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\sin(\pi) + \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[0 + \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Exercice11:

Montrer que :

$$1) \sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) = 2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

$$2) \sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) = -2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

$$3) \text{ En d\u00e9dire que : } \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)} = -\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

Solution:

$$1) \sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) = 2\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cdot \cos\left(-\frac{2\pi}{11}\right)$$

$$= 2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

$$2) \sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right) = 2\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{11} + \frac{7\pi}{11}}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{\frac{3\pi}{11} - \frac{7\pi}{11}}{2}\right)$$

$$= 2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cdot \sin\left(-\frac{2\pi}{11}\right)$$

$$= -2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)$$

$$3) \frac{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) + \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)}{\sin\left(\frac{3\pi}{11}\right) - \sin\left(\frac{7\pi}{11}\right)} = \frac{2\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{-2\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

$$= -\frac{\sin\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{11}\right)}$$

$$= -\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{11}\right)}{\cos\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

$$= -\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

$$= -\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

$$= -\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

$$= -\frac{\tan\left(\frac{5\pi}{11}\right)}{\tan\left(\frac{2\pi}{11}\right)}$$

Exercice 12:

Montrer que : $\frac{\cos(2x) - \cos(4x)}{\cos(2x) + \cos 4x} = \tan(3x) \times \tan x$

Solution:

On a : $\blacksquare \cos(2x) - \cos(4x) = -2 \sin\left(\frac{2x+4x}{2}\right) \cdot \sin\left(\frac{2x-4x}{2}\right) = 2 \sin(3x) \cdot \sin x$

$\blacksquare \cos(2x) + \cos(4x) = 2 \cos\left(\frac{2x+4x}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2x-4x}{2}\right) = 2 \cos(3x) \cdot \cos x$

Donc : $\frac{\cos(2x) - \cos(4x)}{\cos(2x) + \cos 4x} = \frac{2 \sin(3x) \cdot \sin x}{2 \cos(3x) \cdot \cos x} = \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} \times \frac{\sin x}{\cos x} = \tan(3x) \times \tan x$

Exercice 13:

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ; \cos^2\left(\frac{5x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) = -\sin(4x) \cdot \sin x$

Solution

$\cos^2\left(\frac{5x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) = \left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right) \left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right)$

$\blacksquare \left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right) + \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right) = 2 \cos\left(\frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2}\right) \cos\left(\frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2}\right)$
 $= 2 \cos(2x) \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

$\blacksquare \left(\cos\left(\frac{5x}{2}\right) - \cos\left(\frac{3x}{2}\right)\right) = -2 \sin\left(\frac{\frac{5x}{2} + \frac{3x}{2}}{2}\right) \sin\left(\frac{\frac{5x}{2} - \frac{3x}{2}}{2}\right)$
 $= -2 \sin(2x) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$

Donc : $\cos^2\left(\frac{5x}{2}\right) - \cos^2\left(\frac{3x}{2}\right) = 2 \cos(2x) \cos\left(\frac{x}{2}\right) \times (-2) \sin(2x) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$
 $= -\sin(4x) \sin(x)$

Exercice 14:

Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}) ;$

1) $\sin(3x) = \sin x \cdot (3 - 4 \sin^2 x)$

2) $\cos(3x) = \cos x \cdot (4 \cos^2 x - 3)$

3) $\cos(4x) = 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$

4) $\sin(4x) = 4 \sin x (2 \cos^3 x - \cos x)$

5) $\cos^3 x = \frac{1}{4} (3 \cos x + \cos(3x))$

Solution:

$$\begin{aligned}1) \sin(3x) &= \sin(2x + x) = \sin(2x) \cdot \cos x + \cos(2x) \cdot \sin x \\&= 2\sin x \cdot \cos^2 x + (1 - 2\sin^2 x) \sin x \\&= 2\sin x (1 - \sin^2 x) + (1 - 2\sin^2 x) \sin x \\&= 2\sin x - 2\sin^3 x + \sin x - 2\sin^3 x \\&= 3\sin x - 4\sin^3 x \\&= \sin x (3 - 4\sin^2 x)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2) \cos(3x) &= \cos(2x + x) \\&= \cos(2x) \cdot \cos x - \sin(2x) \cdot \sin x \\&= (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x \\&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cdot \cos x \\&= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x \\&= 2\cos^3 x - \cos x - 2\cos x + 2\cos^3 x \\&= 4\cos^3 x - 3\cos x \\&= \cos x (4\cos^2 x - 3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3) \cos(4x) &= \cos(2 \times 2x) \\&= 2\cos^2(2x) - 1 \\&= 2(2\cos^2 x - 1)^2 - 1 \\&= 2(4\cos^4 x - 4\cos^2 x + 1) - 1 \\&= 8\cos^4 x - 8\cos^2 x + 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}4) \sin(4x) &= 2\sin(2x) \cdot \cos(2x) \\&= 2 \times 2\sin x \cdot \cos x \cdot (2\cos^2 x - 1) \\&= 4\sin x (2\cos^3 x - \cos x)\end{aligned}$$

5) Méthode 1:

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \cos x \times \cos^2 x \\&= \cos x \times \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1) \\&= \frac{1}{2}(\cos x \times \cos(2x) + \cos x) \\&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}(\cos(x + 2x) + \cos(2x - x)) + \cos x\right) \\&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cos(3x) + \frac{1}{2}\cos x + \cos x\right) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x))\end{aligned}$$

Méthode 2:

$$\frac{1}{4}(3\cos x + \cos(3x)) = \frac{1}{4}(3\cos x + \cos(2x + x))$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{4} (3\cos x + \cos(2x) \cdot \cos x - \sin(2x) \cdot \sin x) \\
&= \frac{1}{4} (3\cos x + (2\cos^2 x - 1) \cdot \cos x - 2\sin x \cdot \cos x \cdot \sin x) \\
&= \frac{1}{4} (2\cos x + 2\cos^3 x - 2\sin^2 x \cdot \cos x) \\
&= \frac{1}{4} (2\cos x + 2\cos^3 x - 2(1 - \cos^2 x) \cdot \cos x) \\
&= \frac{1}{4} (2\cos x + 2\cos^3 x - 2\cos x + 2\cos^3 x) \\
&= \frac{1}{4} (4\cos^3 x) \\
&= \cos^3 x
\end{aligned}$$

Exercice 15:

$P(x) = \sin(2x) - \sin x$ et $Q(x) = 1 + \cos x + \cos(2x)$

Montrer que : $P(x) = \sin x(2\cos x - 1)$ et $Q(x) = \cos x(2\cos x + 1)$

Solution:

$$\begin{aligned}
\blacksquare P(x) &= \sin(2x) - \sin x \\
&= 2\sin x \cdot \cos x - \sin x \\
&= \sin x(2\cos x - 1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\blacksquare Q(x) &= 1 + \cos x + \cos(2x) \\
&= 1 + \cos x + 2\cos^2 x - 1 \\
&= \cos x + 2\cos^2 x \\
&= \cos x(1 + 2\cos x)
\end{aligned}$$

Exercices 16:

1- Linéariser: $2\cos^2 x \cdot \sin(2x)$

2- Linéariser: $\cos^3 x$

LES EQUATIONS TRIGONOMETRIQUES.

1) Rappelles

1.1 $\boxed{\cos x = a}$.

Propriété :

Considérons l'équation (E): $\cos x = a$ où a est un réel

- 1) si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E) n'admet pas de Solutions.
- 2) les solutions de l'équation $\cos x = 1$ sont les réels $2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.
- 3) les solutions de l'équation $\cos x = -1$ sont les réels $\pi + 2k\pi$ ou $k \in \mathbb{Z}$.
- 4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $]0; \pi[$ qui vérifie $\cos \alpha = a$ et l'ensemble de solutions de l'équation (E) sera $S = \{\alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{-\alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
- 5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $\cos(A(x)) = \cos(B(x))$ sont les solutions des équations $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $A(x) = -B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercices 17:

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.
b) Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.
2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$.
b) Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

1.2 $\boxed{\sin x = a}$.

Propriété :

Considérons l'équation (E') : $\sin x = a$ où a est un réel

- 1) si $a < -1$ ou $a > 1$ alors l'équation (E') n'admet pas de solutions.
- 2) les solutions de l'équation : $\sin x = 1$ sont les réels $\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ où $k \in \mathbb{Z}$
- 3) les solutions de l'équation : $\sin x = -1$ sont les réels $\left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$ où $k \in \mathbb{Z}$
- 4) Si $-1 < a < 1$ alors il existe un seul réel α dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ qui vérifie $\sin \alpha = a$ et l'ensemble des solutions de l'équation (E') sera: $S = \{\alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\pi - \alpha + 2k\pi; k \in \mathbb{Z}\}$.
- 5) En générale : les réels qui vérifient l'équation $\sin(A(x)) = \sin(B(x))$ sont les solutions des équations $A(x) = B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$ ou $A(x) = \pi - B(x) + 2k\pi$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercices 18:

1. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$.
b) Représenter les images des solutions sur le cercle trigonométrique.

2. a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $-\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

b) Déterminer les solutions dans l'intervalle $]-\pi; \pi]$.

1.3 $\boxed{\tan x = a}$.

Propriété :

Pour tout réel a , il existe un et un seul réel α dans l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ qui vérifie $\tan \alpha = a$; et l'équation $\tan x = a$ aura comme ensemble de solutions $S_{\mathbb{R}} = \{\alpha + k\pi / k \in \mathbb{Z}\}$.

En général l'équation : $\tan(A(x)) = \tan(B(x))$ est définie pour les réel x tels que : $A(x) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et $(B(x)) \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$ et a pour solution ensemble des réels x solution de l'équation : $A(x) = B(x) + k\pi$.

Exercices19:

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\tan\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = -1$

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\cos x - \sqrt{3} \sin x = 0$

Exercices20 :

1) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $\cos(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'équation suivante : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

3) Résoudre dans $\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[$ l'équation suivante : $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$

Solution :

1) On a : $\cos(2x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ si et seulement si $2x = x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $2x = -\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

Donc : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $3x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

D'où : $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

Alors : $S = \left\{-\frac{\pi}{3} + 2k\pi; \frac{\pi}{9} + \frac{2}{3}k\pi / k \in \mathbb{Z}\right\}$

2) On a : $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$

Si et seulement si : $2x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} - x + 2k\pi$ ou $2x - \frac{\pi}{3} = \pi - \left(\frac{\pi}{4} - x\right) + 2k\pi$

Si et seulement si : $3x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi$ ou $x = \pi - \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3} + 2k\pi$

Donc : $x = \frac{7\pi}{36} + \frac{2k\pi}{3}$ ou $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

■ Encadrement de $\frac{13\pi}{12} + 2k\pi$ / $k \in \mathbb{Z}$

$$0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{7k}{36} + \frac{2k}{3} \leq 1 \text{ d'où } -\frac{7}{24} \leq k \leq \frac{29}{24} ; \text{ càd : } -0,29 \leq k \leq 1,2 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc $k=0$ ou $k=1$.

$$\text{On trouve pour } k=0 ; x_1 = \frac{7\pi}{36}$$

$$\text{On trouve pour } k=1 ; x_2 = \frac{31\pi}{36}$$

■ Encadrement de $x = \frac{13\pi}{12} + 2k\pi$

$$0 \leq \frac{13\pi}{12} + 2k\pi \leq \pi \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } 0 \leq \frac{13}{12} + 2k \leq 1 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{D'où } -\frac{13}{24} \leq k \leq -\frac{1}{24} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc k n'existe pas

$$\text{D'où } S_{[0;\pi]} = \left\{ \frac{7\pi}{36}, \frac{31\pi}{36} \right\}$$

3) On a : $\tan\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = 1$ est définie :

$$\text{Si et seulement si : } 2x - \frac{\pi}{5} \neq \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Si et seulement si : } x \neq \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc : } D = \mathbb{R} - \left\{ \frac{7\pi}{20} + \frac{k\pi}{2} / k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ or on sait que: } \tan$$

$$\text{Or on sait que : } \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1 ; \text{ alors } 2x - \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{D'où } x = \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2}$$

$$\text{Encadrement de } \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Donc } -\frac{\pi}{2} \leq \frac{9\pi}{40} + \frac{k\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq \frac{9}{40} + \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{9}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{1}{2} - \frac{9}{40}$$

$$\Rightarrow -\frac{29}{40} \leq \frac{k}{2} \leq \frac{11}{40}$$

$$\Rightarrow -\frac{29}{20} \leq k \leq \frac{11}{20}$$

Donc $-1,45 \leq k \leq 0,55$ et $k \in \mathbb{Z}$ Donc $k = -1$ ou $k = 0$.

$$\text{Pour } k = -1 \text{ on trouve } x_1 = \frac{9\pi}{40} + \frac{-\pi}{2} = -\frac{11\pi}{20}$$

Pour $k=0$ on trouve $x_2 = \frac{9\pi}{40}$

$$D'où : S_{\left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[} = \left\{ -\frac{11\pi}{2}; \frac{9\pi}{40} \right\}$$

2) L'équation (E): $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Si $abc=0$ l'équation (E) se ramène à une équation usuelle.

2.1 Transformation de $a\cos x + b\sin x$

Soient a et b deux réels non nuls on a : $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$

Or $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)^2 = 1$; donc il existe un réel p tel que $\cos p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ et $\sin p = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Par suite $a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} (\cos p \cos x + \sin p \sin x)$ et d'après la formule d'addition

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - p)$$

2.2 L'équation : (E): $a\cos x + b\sin x + c = 0$

Soit a, b et c trois réels non nuls

$$a\cos x + b\sin x + c = 0 \Leftrightarrow a\cos x + b\sin x = -c$$

$$\Leftrightarrow \cos(x - p) = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\text{Où } \cos p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin p = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

Ceci revient à l'étude d'une équation usuelle.

Propriété:

Soient a et b deux réels tels que $(a; b) \neq (0; 0)$; on a pour tout réel x :

$$a\cos x + b\sin x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - p) \text{ où le réel } p \text{ est déterminé par : } \cos p = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \text{ et } \sin p = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

L'équation (E): $a\cos x + b\sin x + c = 0$ se ramène à : $\cos(x - p) = -\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Exemple1:

$$\cos x - \sin x ; a=1 \text{ et } b=-1$$

$$\text{On a: } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \cos x - \sin x &= \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x - \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) \\ &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} \cos x - \sin \frac{\pi}{4} \sin x \right) \\ &= \sqrt{2} \cos \left(x + \frac{\pi}{4} \right) \end{aligned}$$

Exemple2:

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'équation : $\sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3}$

Solution:

Transformation de: $\sqrt{3}\cos x + \sin x$; $a = \sqrt{3}$ et $b = 1$ Donc: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + 1^2} = 2$

$$\begin{aligned}\sqrt{3}\cos x + \sin x &= 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x + \frac{1}{2}\sin x\right) \\ &= 2\left(\cos \frac{\pi}{6}\cos x + \sin \frac{\pi}{6}\sin x\right) \\ &= 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)\end{aligned}$$

$$\text{Alors : } \sqrt{3}\cos x + \sin x = \sqrt{3} \Leftrightarrow 2\cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{Ou} \quad \Leftrightarrow x - \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{Ou} \quad \Leftrightarrow x = 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

■ Encadrons $\frac{\pi}{3} + 2k\pi$

$$0 \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{1}{3} + 2k \leq 2$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq 2k \leq 2 - \frac{1}{3}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6}$$

D'où : $k = 0$ et $x_1 = \frac{\pi}{3}$

■ Encadrons $2k\pi$

$$0 \leq 2k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq k \leq 1$$

D'où : $k = 0$ ou $k = 1$ donc : $x_2 = 0$ et $x_3 = 2\pi$

$$\text{Donc : } S = \left\{0; \frac{\pi}{3}; 2\pi\right\}$$

Exercices21:

Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: $3\cos(3x) + \sin(3x) + 2 = 0$

V) LES INEQUATIONS TRIGONOMETRIQUES

1) Rappelles

1.1- Inéquations avec cos

Exemple :

Considérons l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$ Tout d'abord il faut résoudre l'équation $\cos x = \frac{1}{2}$

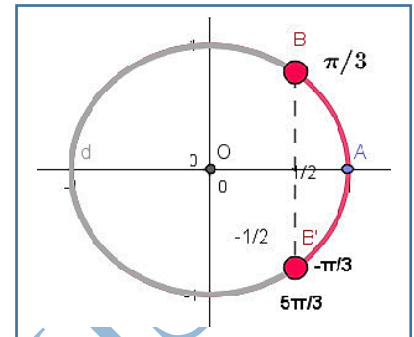
les images des solutions de cette équation sont $M\left(\frac{\pi}{3}\right)$ et $M'\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

et on constate que les réels qui vérifient l'inéquation $\cos x \geq \frac{1}{2}$

sont les abscisse curvilignes des points qui se situent sur l'arc MIM' (en rouge sur la figure) et par suite

On peut conclure que $S_{[-\pi; \pi]} = \left[-\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3}\right]$; les solutions dans $[0; 2\pi]$

Sont $S_{[0; 2\pi]} = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{3}; 2\pi\right]$



Exercices22:

Résoudre dans $[0; 3\pi]$ l'inéquation : $2\cos x + \sqrt{3} \leq 0$

1.2) Inéquations avec sin

Exemple:

Résoudre dans $[0; 2\pi[$ l'inéquation suivante : $\sin x \geq \frac{1}{2}$

$$\sin x \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x \geq \sin \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Donc : } S = \left[\frac{\pi}{6}; \frac{5\pi}{6}\right]$$

Exemple1:

Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation Suivante: $\tan x - 1 \geq 0$

On a : $\tan x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \tan x \geq 1$

On sait que: $\tan \frac{\pi}{4} = 1$

Les arcs MJ et $M'J'$ en rouge correspond a tous les points $M(x)$ tels que x vérifie : $\tan x - 1 \geq 0$

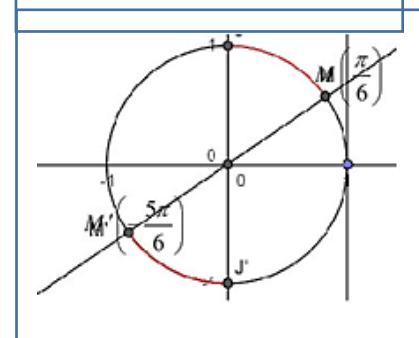
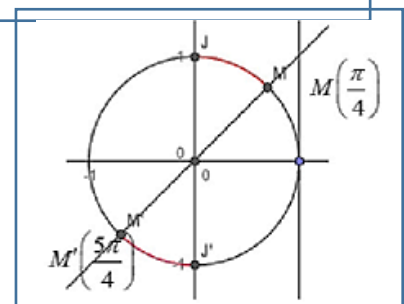
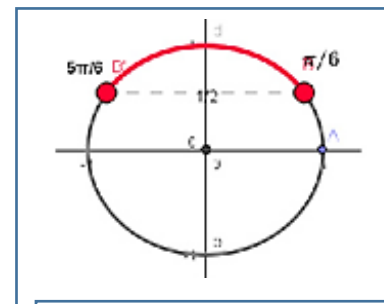
$$\text{Donc : } S = \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{4}; \frac{3\pi}{2}\right]$$

Exemple2 :

Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation suivante: $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

On a : $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$ ssi $\tan x \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$

On sait que: $\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$



Les arcs MJ et $M'J'$ en rouge correspond à tous les points

$M(x)$ tels que x vérifie $3\tan x - \sqrt{3} \geq 0$

$$\text{Donc : } S = \left[-\frac{5\pi}{6}; -\frac{\pi}{2}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{2}\right]$$

Exercices23:

1) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'équation : $\sqrt{3} \cos x - \sin x = 1$

2) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation : $\sqrt{3} \cos x - \sin x \geq 1$

Solution:

Transformation de : $\sqrt{3} \cos x - \sin x$; $a = \sqrt{3}$ et $b = -1$.

$$\text{On a : } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = 2$$

$$\text{Donc : } \sqrt{3} \cos x - \sin x = 1 \Leftrightarrow 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos x - \frac{1}{2} \sin x \right) = 1$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos \frac{\pi}{6} \cos x - \sin \frac{\pi}{6} \sin x \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos \left(x + \frac{\pi}{6} \right) = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x + \frac{\pi}{6} = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

■ Encadrement de : $\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$.

$$\text{On a : } -\pi \leq \frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{6} + 2k \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 - \frac{1}{6}}{2} \leq k \leq \frac{1 - \frac{1}{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow -0,58 \leq k \leq 0,4$$

$$\text{Donc } k=0 \text{ on trouve : } x_1 = \frac{\pi}{6}$$

■ Encadrement de : $-\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{On a : } -\pi \leq -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{2} + 2k \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 + \frac{1}{2}}{2} \leq k \leq \frac{1 + \frac{1}{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1}{4} \leq k \leq \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow -0,25 \leq k \leq 0,75$$

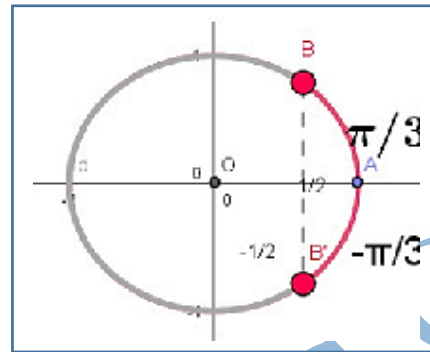
Donc $k = 0$ on trouve: $x_2 = -\frac{\pi}{2}$

$$\text{Donc : } S_{[-\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right\}$$

2) Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation :

$$\begin{aligned} \sqrt{3} \cos x - \sin x &\geq 1 \Leftrightarrow \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \geq \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} &\leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{\pi}{3} \\ \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} &\leq x \leq \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } S_{[-\pi; \pi]} = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{6} \right]$$



Exercices24:

1) a) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation suivante : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0$
et en déduire les solutions dans $[0; 2\pi]$.

b) Résoudre dans $[0; 2\pi]$ l'inéquation suivante : $2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0$

2) Résoudre dans $[0; \pi]$ l'inéquation suivante : $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$

Solution:

1) a) on pose $t = \sin x$

$$2\sin^2 x - 9\sin x - 5 = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t - 5 = 0 \text{ On cherche les racines du trinôme: } (2t^2 - 9t - 5)$$

$$\text{Calcul du discriminant : } \Delta = (-9)^2 - 4 \times 2 \times (-5) = 121$$

$$\text{Les racines sont: } t_1 = \frac{9 - \sqrt{121}}{4} = -\frac{1}{2} \text{ et } t_2 = \frac{9 + \sqrt{121}}{4} = 5 ;$$

$$\sin x = -\frac{1}{2} \text{ et } \sin x = 5$$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$; donc l'équation $\sin x = 5$ n'admet pas de solutions dans $\mathbb{R}$.

$$\sin x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin x = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \pi - \left(-\frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$$

$$S_E = \left\{ -\frac{\pi}{6} + 2k\pi; \frac{7\pi}{6} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z} \right\}$$

■ Encadrement de $-\frac{\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

$$\text{On a : } 0 \leq -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq -\frac{1}{6} + 2k \leq 2$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{6} \leq k \leq 2 + \frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{12} \leq k \leq \frac{13}{12}$$

$$\Leftrightarrow 0,08 \leq k \leq 1,08 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc : $k=1$

Pour $k=1$ on remplace on trouve : $x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi = \frac{11\pi}{6}$

■ Encadrement de $\frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ et $k \in \mathbb{Z}$

On a : $0 \leq \frac{7\pi}{6} + 2k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow 0 \leq \frac{7}{6} + 2k \leq 2$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{6} \leq k \leq \frac{2-\frac{7}{6}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{7}{12} \leq k \leq \frac{5}{12}$$

$$\Leftrightarrow -0,56 \leq k \leq 0,4 \text{ et } k \in \mathbb{Z}$$

Donc : $k=0$

Pour $k=0$ on remplace on trouve : $x_2 = \frac{7\pi}{6}$

$$S_{E[0;2\pi]} = \left\{ \frac{7\pi}{6}; \frac{11\pi}{6} \right\}$$

$$b) 2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow 2\left(\sin x + \frac{1}{2}\right)(\sin x - 5) \leq 0$$

Or on sait que $-1 \leq \sin x \leq 1$; donc $\sin x - 5 < 0$

$$\text{Par suite : } 2\sin^2 x - 9\sin x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow \sin x + \frac{1}{2} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \sin x \geq -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \sin x \geq \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

L'arc en rouge correspond à tous les points $M(x)$ qui vérifient $\sin x \geq -\frac{1}{2}$.

$$\text{Donc : } S = \left[0; \frac{7\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{11\pi}{6}; 2\pi\right]$$

2) L'inéquation $(2\cos x - 1)(\tan x + 1) \geq 0$ est définie dans $[0; \pi]$ si et seulement si $x \neq \frac{\pi}{2} + 2k\pi$

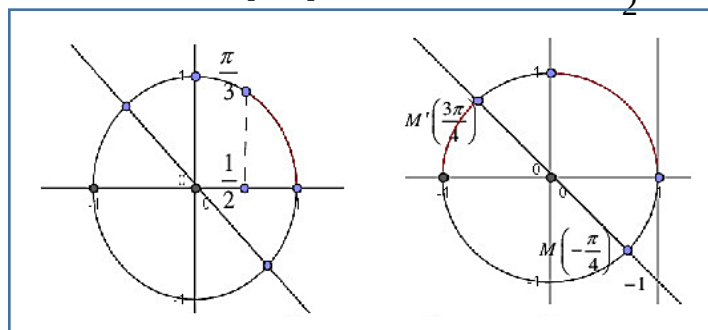
$$\text{Donc } D_E = [0; \pi] - \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}$$

$$\blacksquare 2\cos x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \cos x \geq \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos x \geq \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\blacksquare (\tan x + 1) \geq 0 \Leftrightarrow \tan x \geq -1$$

$$\Leftrightarrow \tan x \geq \tan \frac{3\pi}{4}$$



x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{4\pi}{3}$	π
$2 \cos x - 1$	+	0	-	-	-
$\tan x + 1$	+	+	-	0	+
$(2 \cos x - 1)(\tan x + 1)$	+	0	-	+	-

$$S = \left[0; \frac{\pi}{3}\right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{4\pi}{3}\right]$$

Exercice25:

1. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation : $\sin\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) \leq -\frac{1}{2}$
2. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation : $4\cos^2 x - 2(1 + \sqrt{2})\cos x + \sqrt{2} \leq 0$
3. Résoudre dans $[-\pi; \pi]$ l'inéquation : $\frac{1 + \tan x}{\sin 2x} \geq 0$.

Exercice26

Résoudre dans $\left[-\frac{11\pi}{5}; \frac{14\pi}{5}\right]$ l'inéquation : $\sin(3x) \geq \frac{1}{2}$

Exercice27:

soit $x \in \mathbb{R}$ on pose : $A(x) = \cos(3x) - 3\sin x + 3\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

1) calculer $\cos(3x)$ en fonction de $\cos x$.

Et calculer $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ en fonction de $\cos x$ et $\sin x$.

2) en déduire une écriture simple de $A(x)$

3) a) Résoudre dans $I = [-\pi; \pi]$ l'équation : $A(x) = \frac{1}{2}$

b) Résoudre dans l'inéquation : $A(x) \leq \frac{1}{2}$

Solution:

$$\begin{aligned}
 1) \quad \blacksquare \cos(3x) &= \cos(2x + x) = \cos(2x)\cos x - \sin(2x)\sin x \\
 &= (2\cos^2 x - 1)\cos x - 2\sin x \cos x \sin x \\
 &= 2\cos^3 x - \cos x - 2\sin^2 x \cos x \\
 &= 2\cos^3 x - \cos x - 2(1 - \cos^2 x)\cos x \\
 &= 2\cos^3 x - \cos x + 2\cos^3 x - 2\cos x \\
 &= (4\cos^2 x - 3)\cos x
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) &= \sin x \cos \frac{\pi}{4} + \sin \frac{\pi}{4} \cos x \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x + \frac{\sqrt{2}}{2} \cos x \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} (\sin x + \cos x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad A(x) &= \cos(3x) - 3\sin x + 3\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \\
 &= (4\cos^2 x - 3)\cos x - 3\sin x + 3\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin x + \cos x) \\
 &= (4\cos^2 x - 3)\cos x - 3\sin x + 3\sin x + 3\cos x \\
 &= 4\cos^3 x
 \end{aligned}$$

$$3) a) \quad A(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 4\cos^3 x = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x - \frac{1}{8} = 0$$

$$\Leftrightarrow \cos^3 x - \left(\frac{1}{2}\right)^3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\right) = 0$$

$$\left| \cos x - \frac{1}{2} = 0 \right.$$

$\Leftrightarrow$ ou

$$\left| \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} = 0 \right.$$

$$\blacksquare \cos x - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad \text{ou} \quad x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$$

$$\blacksquare \cos^2 x + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow 4\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$$

On pose : $t = \cos x$

$$\text{Alors : } 4\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0 \Leftrightarrow 4t^2 + 2t + 1 = 0$$

$$\Delta = -16 < 0$$

Donc l'expression $(4\cos^2 x + 2\cos x + 1)$ ne s'annule jamais.

D'où les solutions de l'équation $A(x) = \frac{1}{2}$ sont $x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ ou $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

$\blacksquare$ Encadrement de $\frac{\pi}{3} + 2k\pi \quad / k \in \mathbb{Z}$

$$\text{On a : } -\pi \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -1 \leq \frac{1}{3} + 2k \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 - \frac{1}{3}}{2} \leq k \leq \frac{1 - \frac{1}{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4}{6} \leq k \leq \frac{2}{6}$$

$$\Leftrightarrow -0,66 \leq k \leq 0,33$$

$$\text{Donc : } k = 0 \text{ par suite } x_1 = \frac{\pi}{3}$$

■ Encadrement de $-\frac{\pi}{3} + 2k\pi / k \in \mathbb{Z}$

$$\text{On a : } -\pi \leq -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq \pi \Leftrightarrow -1 \leq -\frac{1}{3} + 2k \leq 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-1 + \frac{1}{3}}{2} \leq k \leq \frac{1 + \frac{1}{3}}{2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{2}{6} \leq k \leq \frac{4}{6}$$

$$\Leftrightarrow -0,33 \leq k \leq 0,66$$

$$\text{Donc : } k = 0 \text{ par suite } x_2 = -\frac{\pi}{3}$$

$$\text{D'où : } S_{[-\pi; \pi]} = \left\{ -\frac{\pi}{3}; \frac{\pi}{3} \right\}$$

$$b) A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) \left(\cos^2 x + \frac{1}{2} \cos x + \frac{1}{4} \right) \leq 0$$

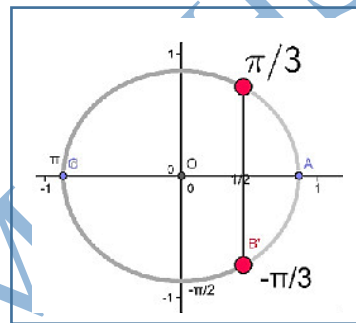
$$\text{On a : } \Delta = -16 < 0 \text{ pour } 4\cos^2 x + 2\cos x + 1 = 0$$

$$\text{Donc : } 4\cos^2 x + 2\cos x + 1 > 0 \text{ sur } \mathbb{R}.$$

$$\text{D'où : } A(x) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \left(\cos x - \frac{1}{2} \right) \leq 0$$

$$\Leftrightarrow \cos x \leq \cos \frac{\pi}{6}$$

$$\text{Par suite : } S = \left[0; \frac{\pi}{3} \right] \cup \left[\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{4} \right]$$



Exercice28:

$$\text{on pose : } A = \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{3\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9}$$

$$1) \text{ monter que: } \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \frac{5\pi}{9} \right)$$

$$2) \text{ monter que: } \cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} = \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right)$$

$$3) \text{ en déduire que: } A = \frac{3}{16}$$

Solution:

$$1) \text{ On a: } \sin a \times \sin b = -\frac{1}{2} (\cos(a+b) - \cos(a-b))$$

$$\sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} = -\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{\pi}{9} + \frac{4\pi}{9} \right) - \cos \left(\frac{\pi}{9} - \frac{4\pi}{9} \right) \right)$$

$$= -\frac{1}{2} \left(\cos \left(\frac{5\pi}{9} \right) - \cos \left(-\frac{3\pi}{9} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) - \cos \left(\frac{5\pi}{9} \right) \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \left(\frac{5\pi}{9} \right) \right)$$

2) On a: $\cos a \times \sin b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) - \sin(a-b))$

$$\begin{aligned} \text{Donc: } \cos \frac{5\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{5\pi}{9} + \frac{2\pi}{9} \right) - \sin \left(\frac{5\pi}{9} - \frac{2\pi}{9} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{7\pi}{9} \right) - \sin \left(\frac{3\pi}{9} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(\frac{7\pi}{9} \right) - \sin \left(\frac{\pi}{3} \right) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \end{aligned}$$

3) Deduction: $A = \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{3\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9}$

$$\begin{aligned} &= \sin \frac{\pi}{9} \times \sin \frac{4\pi}{9} \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{3\pi}{9} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \cos \left(\frac{5\pi}{9} \right) \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \sin \frac{\pi}{3} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} \cos \left(\frac{5\pi}{9} \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \cos \left(\frac{5\pi}{9} \right) \times \sin \frac{2\pi}{9} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{1}{2} \sin \frac{2\pi}{9} - \frac{1}{2} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\sin \left(\pi - \frac{7\pi}{9} \right) - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \left(\sin \frac{7\pi}{9} - \sin \frac{7\pi}{9} + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{16} \end{aligned}$$

Donc: $A = \frac{3}{16}$

Exercice 29:

Soit : $\alpha \in \left] 0; \frac{\pi}{2} \right[$ tel que: $3\sin\alpha + 5\cos\alpha = 5$

1) montrer que: $5\sin\alpha - 3\cos\alpha = 3$.

2) déduire la valeur de : $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$

Solution :

1) $3\sin\alpha + 5\cos\alpha = 5 \Leftrightarrow 3\sin\alpha = 5(1 - \cos\alpha)$

$$\Leftrightarrow 3\sin\alpha = 5 \times 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

Car : $1 - \cos\alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$

$$\text{Donc: } 3\sin\alpha + 5\cos\alpha = 5 \Leftrightarrow 3\sin\alpha = 10\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\Leftrightarrow 6\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = 10\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Car: } \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$$

$$3\sin\alpha + 5\cos\alpha = 5 \Leftrightarrow 3\cos\frac{\alpha}{2} = 5\sin\frac{\alpha}{2}$$

$$\text{Car: } \sin\frac{\alpha}{2} \neq 0 ; \alpha \in \left]0; \frac{\pi}{2}\right[.$$

$$3\sin\alpha + 5\cos\alpha = 5 \Leftrightarrow \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{5}$$

$$\text{On sait que : } \sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} \text{ et } \cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Donc : } 5\sin\alpha - 3\cos\alpha = 5 \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}} - 3 \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$= \frac{5 \times 2 \times \frac{3}{5} - 3 \times \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right)}{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

$$= \frac{6 - 3 \times \frac{16}{25}}{1 + \frac{9}{25}} = \frac{150 - 48}{34}$$

$$= \frac{102}{34} = 3$$

$$\text{D'où : } 5\sin\alpha - 3\cos\alpha = 3$$

2) pour Calculer $\cos\alpha$ et $\sin\alpha$ on résout le système :

$$S : \begin{cases} 3\sin\alpha + 5\cos\alpha = 5 \\ 5\sin\alpha - 3\cos\alpha = 3 \end{cases}$$

$$\text{On obtient : } \cos\alpha = \frac{8}{17} \text{ et } \sin\alpha = \frac{15}{17}$$