Série n° 12 d'exercices non corrigés « Arithmétique » *2éme Bac SM*

EXERCICE 1:

Les parties A et B sont indépendants

Partie A

On considère l'équation $(E):\ 7x-6y=1$ *ou r et y sont des entiers naturels.*

1. Donner une solution particulière de l'équation(E)

2. Déterminer Ensemble des couples d entiers naturels solutions de l'équation (E).

Partie B

Dans cette partie, on se propose de déterminer les couples $(n,\ m)$ *d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation :* $(F): 7^n-3\times 2^m=1$

1. On suppose $n\le 4$ *.*

Montrer qu'il y a exactement deux couples solutions.

2. On suppose maintenant que $m\ge 5$ *.*

a) Montrer que si le couple $(n,\ m)$ *vérifie la relation (F) alors* $7^n\equiv 1\ [32]$

b) En étudiant les restes de la division par 32 des puissances de 7, montrer que si le couple $(n,\ m)$ *vérifie la relation (F) alors n est divisible par 4*

c) En déduire que si le couple $(n,\ m)$ *vérifie la relation (F) alors* $7^n\equiv 1\ [5]$

d) Pour $m\ge 5$*, existe-t-il des couples* $(n,\ m)$ *d'entiers naturels vérifiant la relation (F)?*

3. Conclure, c'est-à-dire déterminer l'ensemble des couples d'entiers naturels non nuls vérifiant la relation (F).

EXERCICE 2:

On considère l'équation diophantienne $x^2-8y^2=1$ *où x et y désignent deux entiers relatifs.*

1. Donner deux couples d'entiers naturels inférieurs à 10 qui sont solutions de (E).

2. Démontrer que, si un couple d'entiers relatifs non nuls (x ; y) est solution de (E), alors les entiers relatifs x et y sont premiers entre eux.

EXERCICE 3:

Soit n une entier naturel, on pose : $a=2n+8\ ;\ b=3n+15$ *On note d le PGCD de a et de b.*

1. Démontrer que, pour tout $n\in IN$ *, d divise 6.*

2. On considère l'ensemble S des entiers naturels n pour lesquels $d=6$ *. C'est-à-dire que l'ensemble S est défini par :* $S=\{n\in IN\ /\ pgcd(2n+8\ ;\ 3n+15)=\ 6\}$

EXERCICE 4:

a) Montrer que si $n\in S$ *alors il existe un entier k tel que :* $n=-4+3k$ *.*

b) En déduire l'ensemble S.

On considère l'équation (E) définie par : $(E):17x-15y=3$ *où l'ensemble de résolution est l'ensemble des couples (x ; y) d'entiers relatifs. Démontrer que, pour tout couple(x ; y)solution de(E),x est un multiple de 3*

EXERCICE 5:

1. Déterminer l'ensemble U des entiers relatifs n tels que $n+2$ *divise* $2n-1$ *.*

2. Montrer que pour tout entier relatif, les entiers $n+2$ *et* $2n^2+3n-1$ *sont premiers entre eux.*

3. Déterminer l'ensemble V des entiers relatifs $n\ne -2$ *tels que* $\dfrac{(2n-1)(2n^2+3n-1)}{(n^2-2)(n+2)}$ *soit un entier relatif.*

EXERCICE 6:

On considère l'équation (E): $44x+35y=2$ *;* $x\in IN$ *,* $y\in IN$

1. a) A l'aide de l'algorithme d'Euclide, montrer que les entiers 44 et 35 sont premiers entre eux.

b) Déterminer un couple $(x_0\ ;\ y_0)$ *vérifiant la relation :* $44x_0+35y_0=1$

2. En déduire l'ensemble des solutions de l'équations(E).

EXERCICE 7:

1. Effectuer la division euclidienne de $1\,038$ *par* 17 .

2. En étudiant le carré $(61\times 17+1)^2$ *, déterminer le reste de la division euclidienne de* $1\,038^2$ *par* 17.

3. En déduire une conjecture sur le reste, pour tout entier naturel n, la division euclidienne de $1\,038^n$ *1 par* 17.

EXERCICE 8:

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel non nul.

1. a) Pour $1\le n\le 6$ *, calculer les restes de la division euclidienne de* 3^n *par 7.*

b) Démontrer que, pour tout n, $3^{n+6}-3^n$ *est divisible par 7. En déduire que* 3^n *et* 3^{n+6} *ont le même reste dans la division par 7.*

c) A l'aide des résultats précédents, calculer le reste de la division euclidienne de 3^{1000} *par 7.*

d) De manière générale, comment peut-on calculer le reste de la division euclidienne de 3^n *par 7, pour n quelconque?*

e) En déduire que, pour tout entier naturel n, 3^n *est premier avec 7.*

2. Soit $U_n=1+3+3^2+\cdots+3^{n-1}=\sum_{i=0}^{n-1}3^i$ *, où n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.*

a) Montrer que si U_n *est divisible par 7 alors* 3^n-1 *est divisible par 7.*

b) Réciproquement, montrer que si 3^n-1 *est divisible par 7 alors* U_n *est divisible par 7.*

En déduire les valeurs de n telles que U_n *soit divisibles par 7.*

EXERCICE 9:

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $2^{3n}-1$ *est un multiple de 7 (on pourra utiliser un raisonnement par récurrence).*

En déduire que $2^{3n}-2$ *est un multiple de 7 et que* $2^{3n}-4$ *est un multiple de 7.*

2. Déterminer les restes de la division par 7 des puissances de 2.

3. Le nombre p étant un entier naturel, on considère le nombre entier : $A_p=2^p+2^{2p}+2^{3p}$

a) Si $p=3n$ *, quel est le reste de la division de* A_p *par 7?*

b) Démontrer que si $p=3n+1$ *alors* A_p *est divisible par 7.*

c) Etudier le cas où $p=3n+2$

EXERCICE 10:

On souhaite déterminer l'ensemble des couples (a ; b) d'entiers naturels solutions de l'équation :

$a^2-3ab+b^2=0$

On suppose l'existence d'un couple (a ; b) solution de cette équation :

1. Justifier l'existence d'entiers naturels a' *et* b' *premiers entre eux vérifiant l'égalité :* $a'^2-3a'b'+b'^2=0$

2. Montrer que a' *divise* b'^2, *puis que* a' *divise* b' .

3. Etablir que b' *vérifie la relation :* $1-3b'+b'^2=0$.

4. Conclure.

EXERCICE 11:

• *Montrer que* $(\forall a\in\mathbb{Z})$; $a^{31}-a$ *est divisible par 6.*

• *Montrer que* $(\forall a\in\mathbb{Z})\,(\forall n\in\mathbb{N}^*)$; $a^{30+n}-a^n$ *est divisible par 62.*

EXERCICE 12

On considère deux entiers relatifs a et b et p un entier naturel premier, Montrer que : $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \,[p]$

EXERCICE 13:

1. Soit p un nombre premier impair.
   a) Montrer qu'il existe un entier naturel k, non nul, tel que : $2^k \equiv 1 \,[p]$.
   b) Soit k un entier naturel non nul tel que : $2^k \equiv 1 \,[p]$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors $2^n \equiv 1 \,[p]$.
   c) Soit b tel que $2^b \equiv 1 \,[p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que si $2^n \equiv 1 \,[p]$, alors b divise n.
2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour p un diviseur premier de A.
   a) Justifier que : $2^q \equiv 1 \,[p]$.
   b) Montrer que p est impair.
   c) Soit b tel que $2^b \equiv 1 \,[p]$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété. Montrer, (en utilisant la question 1.) que b divise q. En déduire que $b = q$.
   d) Montrer que q divise p −1, puis montrer que : $p \equiv 1 \,[2q]$.

EXERCICE 14:

Soit p est un nombre premier supérieur ou égal à 3.
On considère l'ensemble $A_p = \{1; 2 \,;\, ... \,;\, p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p.
Soit a un élément de A_p .

1) Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation: $ax \equiv 1 \,[p]$

2) On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution dans A_p de l'équation: $ax \equiv 1 \,[p]$

3) Résoudre dans A_{31} les équations $2x \equiv 1 \,[31]$ et $3x \equiv 1 \,[31]$.

A l'aide des résultats précédents résoudre $\mathbb{Z}$ dans l'équation: $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \,[31]$

EXERCICE 15

1. Soit $p_1, p_2, ..., p_r$, r nombres premiers.

Montrer que l'entier $N = p_1 \times p_2 \times ... \times p_r + 1$ n'est divisible par aucun des entiers p_i .

2. Utiliser la question précédente pour montrer par l'absurde qu'il existe une infinité de nombres premiers.