



Devoir surveillé n°2 C 2ème semestre

2ème Bac SM

Exercice 01 : (5,5 points)

On considère la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}$.

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, On pose : $u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}$.

1)- a)- Montrer que les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.

b)- Que peut-on conclure ?

2)- a)- Montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+), \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} x^{k-1} \leq \frac{1}{1+x} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} x^{k-1}$.

b)- En déduire que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+), \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} x^k$.

3)- a)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), u_n \leq \ln 2 \leq v_n$, puis déduire la valeur de la limite

Commune de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

b)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), |S_n - \ln 2| \leq \frac{1}{n}$ (On pourra procéder par disjonction De deux cas).

c)- En déduire que la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est convergente en précisant sa limite.

Exercice 02 : (5,5 points)

Soit f la fonction définie sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ par : $f(x) = -\ln(\cos x)$.

1)- a)- Calculer $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x)$. Puis justifier que f est continue sur I .

b)- Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}^+$.

c)- Déterminer $f^{-1}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$.

2)- Montrer que l'équation (E) : $f(x) = x$ une solution unique α dans $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$

Et que $\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

3)- On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = \frac{\pi}{4}$ et $(\forall n \in \mathbb{N}), u_{n+1} = f(u_n)$.

a)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}), 0 < u_n \leq \frac{\pi}{4}$.

b)- Etudier la monotonie de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, puis en déduire qu'elle est convergente.

c)- Déterminer la limite de $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ en justifiant soigneusement votre réponse.

Exercice 03 : (09 points)

I- Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $g(t) = \ln(1 + \sqrt{t}) - \sqrt{t}$.

1)- a)- Montrer que g est continue sur $\mathbb{R}^+$.

b)- Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$ et que : $g'(t) = \frac{-1}{2(1 + \sqrt{t})}$.

2)- a)- Montrer que : $(\forall t \in \mathbb{R}^{*+}) (\exists c \in]0, t^2[), \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \frac{-1}{2(1 + \sqrt{c})}$.

b)- En déduire que : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \frac{-1}{2}$.

II- On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $f(1) = 1$ et

$$(\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[), f(x) = \frac{\ln x}{x-1}.$$

1)- Calculer $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, Puis interpréter géométriquement chaque limite.

2)- a)- Montrer que f est continue en $x_0 = 1$.

b)- Montrer que f est dérivable en $x_0 = 1$ (On pourra utiliser I-2)- b)-).

3)- a)- Montrer que : $(\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[), f'(x) = \frac{(x-1) - x \ln x}{x(x-1)^2}$.

b)- Montrer que : $(\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[), (x-1) - x \ln x < 0$. puis dresser le tableau de variation de f .

4)- Construire la courbe (C_f) dans un repère orthonormé.

5)- a)- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) (\exists ! a_n \in \mathbb{R}^{*+}), f(a_n) = 1 + \frac{1}{n}$.

b)- Vérifier que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*), 0 < a_n < 1$.

c)- Justifier que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est strictement décroissante ; puis en déduire qu'elle est convergente.

d)- Montrer que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - a_n) = 2$, Puis en déduire que :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = \frac{1}{e^2}.$$

Correction

Exercice 01 : (5,5 points)

la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}^*} : S_n = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}}{k}.$

Et pour tout $n \in \mathbb{N}^* : u_n = S_{2n}$ et $v_n = S_{2n+1}.$

1) a) • la monotonie de (u_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $u_{n+1} - u_n = S_{2(n+1)} - S_{2n}$

$$\begin{aligned} &= \sum_{k=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} + \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\ &= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n}}{2n+1} \\ &= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} \\ &= \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} \end{aligned}$$

Et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{1}{(2n+1)(2n+2)} > 0$

Donc (u_n) est croissante.

• La monotonie de (v_n)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $v_{n+1} - v_n = S_{2(n+1)+1} - S_{2n+1}$

$$= \sum_{k=1}^{2n+3} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} - \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \\
&= \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} \\
&= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} \\
&= \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)}
\end{aligned}$$

Et $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \frac{-1}{(2n+3)(2n+2)} < 0$

Donc (v_n) est décroissante.

• Calculons $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n)$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $v_n - u_n = S_{2n+1} - S_{2n}$

$$\begin{aligned}
&= S_{2n} + \frac{(-1)^{2n+1-1}}{2n+1} - S_{2n} \\
&= \frac{1}{2n+1}
\end{aligned}$$

Donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$

D'où les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes.

2) a) $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot x^{k-1} = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1}$

$\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1}$ est une somme de $2n$ premiers termes d'une suite géométrique de raison

$(-x)$ avec $(-x \neq 1)$; donc : $\sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1} = \frac{1 - (-x)^{2n}}{1 - (-x)}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1 - x^{2n}}{1 + x} \\
&= \frac{1}{1+x} - \frac{x^{2n}}{1+x}
\end{aligned}$$

D'où $\frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-x)^{k-1} = \frac{x^{2n}}{1+x} \geq 0$

Par suite $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \boxed{\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot x^{k-1} \leq \frac{1}{1+x}}$

De la même manière on montre que : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \cdot x^{k-1} - \frac{1}{1+x} = \frac{x^{2n+1}}{1+x} \geq 0$

Donc $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \boxed{\frac{1}{1+x} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \cdot x^{k-1}}$

Conclusion : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \boxed{\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot x^{k-1} \leq \frac{1}{1+x} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \cdot x^{k-1}}$

b) • Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^+ ; f(x) = \ln(1+x) - \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$

f est somme de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}^+ ;$ donc elle est dérivable sur $\mathbb{R}^+ ;$

et on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; f'(x) = \frac{1}{1+x} - \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot x^{k-1}$

D'après la question précédente on a : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1} \cdot x^{k-1} \leq \frac{1}{1+x}$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; f'(x) \geq 0$

Par suite f est croissante sur $\mathbb{R}^+.$

Et comme $f(0) = 0 ;$ alors : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; f(x) \geq 0$

D'où : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \boxed{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k \leq \ln(1+x)}$

• Posons pour tout $x \in \mathbb{R}^+ ; g(x) = \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k - \ln(1+x)$

De la même manière que pour f on montre que g est croissante sur $\mathbb{R}^+$ en utilisant le

résultat de la question précédente : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \frac{1}{1+x} \leq \sum_{k=1}^{2n+1} (-1)^{k-1} \cdot x^{k-1}$

Et comme $g(0) = 0$; alors : $(\forall x \in \mathbb{R}^+) ; g(x) \geq 0$

$$D'où : (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k$$

$$\text{On conclut que : } (\forall x \in \mathbb{R}^+) ; \boxed{\sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k \leq \ln(1+x) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \cdot x^k}$$

3) a) On appliquant la double inégalité précédente pour $x=1$; on obtient :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \leq \ln(2) \leq \sum_{k=1}^{2n+1} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; u_n \leq \ln(2) \leq v_n$$

$$\text{On déduit que : } (\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 0 \leq \ln(2) - u_n \leq v_n - u_n$$

Et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (u_n - v_n) = 0$; alors (u_n) est convergente de limite $\ln(2)$.

$$\text{Aussi on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n ; \text{ alors } \boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = \ln(2)}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$

• **Si n est paire :**

$$\text{Alors } \exists p \in \mathbb{N}^* / n = 2p ; \text{ donc } S_n = S_{2p} = u_p$$

$$\text{Et comme } u_p \leq \ln(2) \leq v_p$$

$$\text{Donc } 0 \leq \ln(2) - u_p \leq v_p - u_p$$

$$D'où \quad 0 \leq \ln(2) - S_n \leq \frac{1}{2p+1} \quad (\text{résultat de la question 1)a}) \quad v_p - u_p = \frac{1}{2p+1}$$

$$\text{Alors } 0 \leq \ln(2) - S_n \leq \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{n}$$

$$\text{On conclut que : } |S_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n}$$

● **Si n est impaire :**

Alors $\exists p \in \mathbb{N}^* / n = 2p + 1$; donc $S_n = S_{2p+1} = v_p$

Et comme $u_p \leq \ln(2) \leq v_p$

Donc $0 \leq v_p - \ln(2) \leq v_p - u_p$

D'où $0 \leq S_n - \ln(2) \leq \frac{1}{n}$ (résultat de la question 1)a) $v_p - u_p = \frac{1}{2p+1} = \frac{1}{n}$

On conclut que : $|S_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n}$

Par suite $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \boxed{|S_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n}}$

c) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; |S_n - \ln(2)| \leq \frac{1}{n}$; et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$; alors (S_n) est convergente de limite $\ln(2)$.

Exercice 02 :

$\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] : f(x) = -\ln(\cos x) \right).$

1)- a)- On a : $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \cos x = 0$.et $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right] : \cos x > 0 \right).$

En posant $t = \cos x$; on a : $x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^- \text{ alors } t \rightarrow 0^+$

D'où $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (-\ln(\cos x))$
 $= \lim_{t \rightarrow 0^+} (-\ln(t)) = +\infty$

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) = +\infty}$

La fonction $u : x \mapsto \cos x$ est continue est strictement positive sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

Donc f est continue sur I .

b) La fonction $u : x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $I = \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ et $u'(x) = -\sin x$

Donc f est dérivable sur I ; et $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) ; f'(x) = \frac{-u'(x)}{u(x)}$
$$= \frac{\sin x}{\cos x} = \tan x$$

Et comme $\left(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) ; \tan x \geq 0$

Alors f est strictement croissante sur I ; d'après la question 1)a) f est continue sur I .

Donc f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur l'intervalle

$$J = f\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[\right) = \left[f(0), \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f(x) \right[= [0, +\infty[$$

c) Soit $x \in \mathbb{R}^+$; on a : $y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in I ; x \in J \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -\ln(\cos y) = x \\ y \in I ; x \in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = e^{-x} \\ y \in I ; x \in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos^2 y = e^{-2x} \\ y \in I ; x \in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{\cos^2 y} = e^{2x} \\ y \in I ; x \in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \tan^2 y = e^{2x} \\ y \in I ; x \in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan^2 y = e^{2x} - 1 \\ y \in I ; x \in J \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \tan y = \sqrt{e^{2x} - 1} \\ y \in I; x \in J \end{cases}$$

(Car $y \in I$ donc $\tan y \geq 0$ et $x \in J$ donc $e^{2x} \geq 1$)

$$D'où \left(\forall x \in J = [0; +\infty[\right) ; \boxed{f^{-1}(x) = \text{Arctan}\left(\sqrt{e^{2x} - 1}\right)}$$

2) posons $g(x) = f(x) - x$ (où $x \in I$)

g est somme de deux fonctions dérivables sur I ; donc g est dérivable sur I et pour tout

$$x \in I \text{ on a : } g'(x) = f'(x) - 1 \\ = \tan x - 1$$

$$\text{Donc } g'(x) = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Et } g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq x < \frac{\pi}{2}$$

Tableau de variation de g

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$g'(x)$	-	0	+
$g(x)$	0	$\frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4}$	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = +\infty \text{ (car } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} (f(x) - x))$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } g\left(\frac{\pi}{4}\right) &= f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \\ &= -\ln\left(\cos \frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \\ &= -\ln\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) - \frac{\pi}{4} \\
&= \ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4} \\
&= \frac{\ln 2}{2} - \frac{\pi}{4} < 0
\end{aligned}$$

g est strictement décroissant sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

Donc $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right) ; g(x) < g(0)$ et $g(0) = 0$

D'où $\left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right) ; g(x) < 0$

Par suite l'équation $g(x) = 0$ (càd : $(E) : f(x) = x$) n'admet pas de solution dans $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

La restriction h de g sur l'intervalle $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ est continue strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$;

donc h est une bijection de $\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ vers $\left[\frac{\ln 4 - \pi}{4}; +\infty\right]$ et comme $0 \in \left[\frac{\ln 4 - \pi}{4}; +\infty\right]$;

alors l'équation : $h(x) = 0$ (càd : $(E) : f(x) = x$) admet une solution unique α dans

$\left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right]$ et de plus $h\left(\frac{\pi}{3}\right) < 0$; alors $h\left(\frac{\pi}{3}\right) < h(\alpha)$

Et h est une bijection strictement croissante alors $\frac{\pi}{3} < \alpha$

D'où $\boxed{\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{\pi}{2}}$

$$3) (u_n) : \begin{cases} u_0 = \frac{\pi}{4} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

a) Montrons par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \frac{\pi}{4}$

Pour $n=0$

$$u_0 = \frac{\pi}{4} \text{ donc } 0 < u_0 \leq \frac{\pi}{4}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $0 < u_n \leq \frac{\pi}{4}$ et montrons que $0 < u_{n+1} \leq \frac{\pi}{4}$.

On a : $0 < u_n \leq \frac{\pi}{4}$ et f est strictement croissante sur $\left[0; \frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{Donc } f(0) < f(u_n) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

D'une part $f(0)$ et d'autre part la fonction g est négative sur $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; donc

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{4} \leq 0 ; \text{ d'où } f\left(\frac{\pi}{4}\right) \leq \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Par suite : } 0 < u_{n+1} \leq \frac{\pi}{4}$$

Conclusion : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n \leq \frac{\pi}{4}$

$$b) \text{ On a : } \left(\forall x \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right] \right) ; f(x) \leq x \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{Donc } (\forall n \in \mathbb{N}) ; f(u_n) \leq u_n$$

$$\text{D'où } (\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq u_n$$

Donc la suite (u_n) est décroissante, Comme elle est minorée par 0 ; Alors elle est convergente.

$$c) \text{ On a : } \bullet f \text{ est continue sur } \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$$

- $f\left(\left[0; \frac{\pi}{4}\right]\right) \subset \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

- $u_0 \in \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$

- $u_{n+1} = f(u_n)$

- (u_n) est convergente

Donc sa limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$ dans $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$.

On sait que l'équation $f(x) = x$ admet deux solutions dans $\left[0; \frac{\pi}{4}\right]$ qui sont 0 et α ;

Comme $\alpha > \frac{\pi}{3}$ alors $\alpha \notin \left[0; \frac{\pi}{4}\right]$; donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0}$

Exercice 3

I- pour tout $t \in \mathbb{R}^+$; $g(t) = \ln(1 + \sqrt{t}) - \sqrt{t}$

1) a) La fonction $t \mapsto 1 + \sqrt{t}$ est continue of strictement positive sur $\mathbb{R}^+$;

Donc la fonction $t \mapsto \ln(1 + \sqrt{t})$ est continue sur $\mathbb{R}^+$; de plus la fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est continue sur $\mathbb{R}^+$; donc la fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$ (Comme somme de deux fonctions continues)

b) La fonction $t \mapsto 1 + \sqrt{t}$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$; donc la fonction $t \mapsto \ln(1 + \sqrt{t})$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $t \mapsto \sqrt{t}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; donc la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$,

et on a : $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) ; g'(t) = (\ln(1 + \sqrt{t}) - \sqrt{t})'$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(1+\sqrt{t})'}{1+\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{t}} - \frac{1}{2\sqrt{t}} \\
&= \frac{1-1-\sqrt{t}}{2(1+\sqrt{t})\sqrt{t}} \\
&= \frac{-\sqrt{t}}{2(1+\sqrt{t})\sqrt{t}} \\
&= \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}
\end{aligned}$$

Donc $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) ; \boxed{g'(t) = \frac{-1}{2(1+\sqrt{t})}}$

2) a) Soit $t \in \mathbb{R}_+^*$

La fonction g est continue sur $\mathbb{R}^+$; et dérivable Sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc elle est en particulier continue sur $[0; t^2]$ et dérivable sur $]0; t^2[$.

En appliquant le théorème des accroissements finis à g sur $[0; t^2]$; on a :

$$(\exists c \in]0; t^2[) / g(t^2) - g(0) = (t^2 - 0)g'(c)$$

$$\text{Donc : } (\exists c \in]0; t^2[) / \frac{g(t^2) - g(0)}{t^2} = g'(c)$$

$$\text{Cela veut dire : } (\exists c \in]0; t^2[) / \frac{\ln(1+t) - t}{t^2} = \frac{-1}{2(1+\sqrt{c})}$$

Conclusion $(\forall t \in \mathbb{R}_+^*) \left(\exists c \in]0; t^2[\right) / \boxed{\frac{\ln(1+t)-t}{t^2} = \frac{-1}{2(1+\sqrt{c})}}$

b) Comme $c \in]0; t^2[$ alors : $t \rightarrow 0^+ \Rightarrow t^2 \rightarrow 0^+ \Rightarrow c \rightarrow 0^+$

Alors : $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)-t}{t^2} = \lim_{c \rightarrow 0^+} \frac{-1}{2(1+\sqrt{c})} = -\frac{1}{2}$

Donc $\boxed{\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+t)-t}{t^2} = -\frac{1}{2}}$

II- $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(x)}{x-1} & \text{si } x \in]0; 1[\cup]1; +\infty[\\ f(1) = 1 \end{cases}$

1) •) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x)}{x-1} = +\infty$ (Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x-1} = -1$)

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$

•) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x-1}$
 $= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \times \frac{x}{x-1} \right) = 0$

(Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln(x)}{x} \right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x-1} \right) = 1$)

Donc $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0}$

Interprétation géométrique

•) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$

La courbe de f admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

•) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

La courbe de f admet l'axe des ordonnées comme asymptote horizontale au voisinage de $+\infty$.

2) a) On a : $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{\ln(x)}{x-1} \right) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1$ et $f(1) = 1$

D'où $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$

Donc f est continue en $x_0 = 1$

b) On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\frac{\ln x}{x-1} - 1}{x-1} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\ln x - (x-1)}{(x-1)^2} \right)$$

On pose $t = x - 1$; alors $x \rightarrow 1^+ \Rightarrow t \rightarrow 0^+$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\ln(t+1) - t}{t^2} \right) = -\frac{1}{2}$ (d'après la question 2)b))

D'où $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x-1} \right) = -\frac{1}{2}$

On a pour tout $0 < x < 1$; $f(x) = \frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right)$

Donc $\frac{f(x) - f(1)}{x-1} = \frac{\frac{1}{x} f\left(\frac{1}{x}\right) - f(1)}{x-1}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\frac{1}{x} \left(f\left(\frac{1}{x}\right) - x \right)}{x \left(1 - \frac{1}{x} \right)} \\
&= -\frac{1}{x^2} \times \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - x}{\frac{1}{x} - 1} \\
&= -\frac{1}{x^2} \times \left(\frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x} - 1} + \frac{1 - x}{\frac{1}{x} - 1} \right) \\
&= -\frac{1}{x^2} \times \left(\frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x} - 1} + x \right)
\end{aligned}$$

Comme $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x} - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(t) - f(1)}{t - 1} \right) = -\frac{1}{2}$

Alors $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f\left(\frac{1}{x}\right) - 1}{\frac{1}{x} - 1} + x \right) = \frac{1}{2}$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(-\frac{1}{x^2} \right) = -1$

D'où $\boxed{\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = -\frac{1}{2}}$

Donc $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} \right) = -\frac{1}{2}$

Par suite f est dérivable en $x_0 = 1$ et $f'(1) = -\frac{1}{2}$

$$\begin{aligned} 3) a) (\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[) ; f'(x) &= \left(\frac{\ln(x)}{x-1} \right)' \\ &= \frac{\frac{1}{x}(x-1) - \ln(x)}{(x-1)^2} \\ &= \frac{(x-1) - x \ln(x)}{x(x-1)^2} \end{aligned}$$

Donc $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[) ; \boxed{f'(x) = \frac{(x-1) - x \ln(x)}{x(x-1)^2}}$

b) posons $\varphi(x) = (x-1) - x \ln x$ (où $(x \in \mathbb{R}_+^*)$)

φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$ on a : $\varphi'(x) = 1 - \ln x - 1 = -\ln x$

Tableau de variations de φ

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+	0
$\varphi(x)$		↗ 0 ↘	

↗ 0 est une valeur maximale pour φ sur $]0;+\infty[$ donc $(\forall x \in]0;+\infty[) : \varphi(x) \leq 0$

Conclusion : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[) : (x-1) - x \ln x < 0$

D'après ce qui précède on a : $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[) ; f'(x) = \frac{(x-1) - x \ln(x)}{x(x-1)^2}$

Donc $(\forall x \in]0;1[\cup]1;+\infty[) ; f'(x) < 0$ et comme $f'(1) = -\frac{1}{2}$

Alors $(\forall x \in]0;+\infty[) ; f'(x) < 0$

Tableau de variations de f

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	—	
$f(x)$	$+\infty$	0

5) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$; donc continue sur $\mathbb{R}_+^*$; de plus elle est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Donc f est une bijection de $\mathbb{R}_+^*$ vers l'intervalle $f(\mathbb{R}_+^*) = \left] \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) \right[= \mathbb{R}_+^*$

Comme $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \left(1 + \frac{1}{n}\right) \in \mathbb{R}_+^*$; alors : $(\exists ! a_n \in \mathbb{R}_+^*) / f(a_n) = 1 + \frac{1}{n}$

b) On a : $f(1) = 1$ et $f(a_n) = 1 + \frac{1}{n}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(a_n) > f(1)$

Et f est une bijection strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; donc sa bijection réciproque f^{-1} est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$; d'où : $f^{-1}(f(a_n)) > f^{-1}(f(1))$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n < 1$

Comme $a_n \in \mathbb{R}_+^*$ alors : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \boxed{0 < a_n < 1}$.

c) On a : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; 1 + \frac{1}{n} > 1 + \frac{1}{n+1}$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(a_n) > f(a_{n+1})$

Par suite : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f^{-1}(f(a_n)) < f^{-1}(f(a_{n+1}))$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; a_n < a_{n+1}$

Donc la suite (a_n) est strictement croissante ; de plus elle est majorée par 1 donc elle est convergente.

d) $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; f(a_n) = 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow a_n = f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ et f^{-1} est continue en 1 car elle est continue sur $\mathbb{R}_+^*$

Donc : $\lim_{n \rightarrow +\infty} f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) = f^{-1}(1) = 1$ (Car $f(1) = 1$)

D'où : $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1}$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $n(1 - a_n) = n\left(1 - f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)$

$$= -\frac{f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}{\frac{1}{n}}$$

$$= -\frac{f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f^{-1}(1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1}$$

Comme f est dérivable en 1 et $f'(1) = -\frac{1}{2} \neq 0$; alors f^{-1} est dérivable en 1 et

$$\left(f^{-1}\right)'(1) = \frac{1}{f'(1)} = -2 ; \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{f^{-1}\left(1 + \frac{1}{n}\right) - f^{-1}(1)}{\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1} \right) = \left(f^{-1}\right)'(1) = -2$$

D'où $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} n(1 - a_n) = 2}$

• Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$; on a : $f(a_n) = 1 + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = 1 + \frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow \frac{\ln a_n}{a_n - 1} = \frac{n+1}{n}$$

$$\Leftrightarrow n \ln a_n = n(a_n - 1) + a_n - 1$$

$$\Leftrightarrow \ln(a_n)^n = n(a_n - 1) + a_n - 1$$

$$\Leftrightarrow (a_n)^n = e^{n(a_n - 1)} \times e^{a_n - 1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n - 1) = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - 1) = -2$; et la fonction exponentielle est

continue en 0 et en -2 ; alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{a_n - 1} = e^0 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n(a_n - 1)} = e^{-2} = \frac{1}{e^2}$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n)^n = \frac{1}{e^2}}$