Examen national du baccalauréat session de rattrapage 2016

## Exercice 1 ( 3pts)

*Soit la suite* $(U_n)$ *définie sur IN par :*

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \frac{1}{16}U_n + \frac{15}{16} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1. a) *montrer par récurrence que :* $U_n > 1$ *pour tout n de IN.*

   b) *vérifier que* $: U_{n+1} - U_n = -\frac{15}{16}(U_n - 1)$ *pour tout n de IN et que la suite* $(U_n)$ *est décroissante*

   c) *en déduire que la suite* $(U_n)$ *est convergente.*

2. *soit la suite* $(V_n)$ *définie par :* $V_n = U_n - 1$ *pour tout n de IN.*

   a) *montrer que la suite* $(V_n)$ *est géométrique de raison* $\frac{1}{16}$ *, puis écrire* $V_n$ *en fonction de n.*

   b) *montrer que :* $U_n = 1 + \left(\frac{1}{16}\right)^n$ *pour tout n de IN et préciser la limite de la suite* $(U_n)$.

## Exercice 2 ( 3pts)

*On considère dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct* $(o;\vec{i};\vec{j};\vec{k})$ *les points A(1,3,4) et B(0,1,2).*

1. a) *Montrer que :* $\overrightarrow{OB} \wedge \overrightarrow{OC} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$

   b) *Montrer que :* $2x - 2y + z = 0$ *est l'équation cartésienne du plan (OAB).*

2. *Soit la sphère* $(S)$ *d'équation :* $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 6y - 6z + 2 = 0$

   *montrer que le point Ω(3,-3,3) est le centre de la sphère* $(S)$ *et 5 est son rayon.*

3. a) *Montrer que le plan (OAB) est tangent à la sphère* $(S)$

   b) *Déterminer les coordonnées du point H point de contact du plan (OAB) et de la sphère* $(S)$ .

## Exercice 3 ( 3pts)

1. *Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes* $\mathbb{C}$ *l'équation :*

   $z^2 - 8z + 41 = 0$ .

2. On considère dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $\left(o;\vec{e_1};\vec{e_2}\right)$ les points A, B et C et Ω, d'affixes respectifs $a=4+5i$ , $b=3+4i$ . $c=6+7i$ et $\omega=4+7i$

a) Calculer $\frac{c-b}{a-b}$ et en déduire que les points A, B et C sont alignés.

b) Soit $z$ l'affixe du point M du plan et z' l'affixe du point M' image de M par la rotation R de centre Ω et d'angle $-\frac{\pi}{2}$ , montrer que : $z'=-iz-3+11i$

c) Déterminer l'image du point C par la rotation R , puis écrire sous une forme trigonométrique le nombre complexe $\frac{a-\omega}{c-\omega}$ .

## Exercice 4 ( 3 pts )

Une urne contient 10 boules numérotées :1,2,2,3,3,3,4,4,4,4 (indiscernables au toucher)

On tire de façon aléatoire ,successivement et sans remise, deux boules de l'urne.

1. On considère les événements A «tirer deux boules qui portent des numéros pairs»

Montrer que : $P(A)=\frac{1}{3}$

2. On reprend l'expérience précédente 3 fois en remettant les boules tirées à chaque fois.

Soit X la variable aléatoire liée au nombre de fois que A se réalise.

Montrer que : $P(X=1)=\frac{4}{9}$ , puis donner la loi de probabilité de X

## Probléme ( 8pts )

I- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=\frac{2}{x}-1+2\ln x$

Le tableau suivant est le tableau de variation de la fonction g sur $]0;+\infty[$

| $x$ | 0 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | - | 0 | + | |
| $g(x)$ | $+\infty$ | ↘ | g(1) | ↗ | $+\infty$ |

1. Calculer g(1).
2. Déduire à partir du tableau ci-dessus que : $g(x)>0$ pour tout x de $]0;+\infty[$ .

II - Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=3-3x+2(x+1)\ln x$

Et $(C_f)$ sa courbe dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$ (unité 2cm).

1. montrer que : $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, Interpréter géométriquement le résultat obtenu .
2. a) Montrer que : $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

   Pour calculer cette limite on écrira $f(x)$ sous la forme suivante :

   $\left( f(x) = x\left[\frac{3}{x} - 3 + 2\left(1+\frac{1}{x}\right)\ln x\right]\right)$

   b) montrer que la courbe $(C_f)$ admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage $+\infty$
3. a) montrer que $f'(x)=g(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$ .

   b) en déduire que la fonction f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ puis dresser son tableau de variation sur $]0;+\infty[$
4. a) montrer que le point $I(1,0)$ est un point d'inflexion de $(C_f)$

   b) montrer que : $y = x - 1$ est une équation cartésienne de la tangente $(T)$ à $(C_f)$ au point I

   c) construire dans le même repère $(o;\vec{i};\vec{j})$ la droite (T) et la courbe $(C_f)$
5. a) Montrer que : $\int_1^2 \left(1+\frac{x}{2}\right)dx = \frac{7}{4}$ .

   b) En utilisant une intégration par partie montrer que : $\int_1^2 (x+1)\ln x \, dx = 4\ln 2 - \frac{7}{4}$

c) calculer en cm² l'air de la partie délimitée par la courbe $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations x=1 et x=2 .

d) résoudre graphiquement l'inéquation : $(x+1)\ln x \geq \frac{3}{2}(x-1)$ sur l'intervalle $]0;+\infty[$ .