guessmaths

Exercices sur suite définie par une intégrale 2éme Bac SM

(Calculatrices non autorisées)

Exercice 1 *(4 points)*

Le but de cet exercice est l'étude de la suite $\left(u_n\right)$ *définie par* $u_0=\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}dx$ *; et pour tout entier naturel* $n\geq 1$, $u_n=\int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}dx$

1) a) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ *par :* $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$.

Calculer la dérivée f' *de f, en déduire* u_0.

b) Calculer u_1.

2) a) Prouver que la suite $\left(u_n\right)$ *est décroissante (on ne cherche pas à calculer* u_n*).*

En déduire que la suite $\left(u_n\right)$ *est convergente.*

b) Montrer que pour tout réel x appartenant à $[0,1]$ *on a :* $1\leq\sqrt{x^2+1}\leq\sqrt{2}$

En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 1$*, on a :* $\frac{1}{(n+1)\sqrt{2}}\leq u_n\leq\frac{1}{n+1}$

Déterminer la limite de la suite $\left(u_n\right)$.

3) Pour tout entier naturel $n\geq 3$*, on pose:* $I_n=\int_0^1 x^{n-2}\sqrt{1+x^2}\,dx$.

a) Vérifier que pour tout entier naturel $n\geq 3$*, on a :* $u_n+u_{n-2}=I_n$

Par intégration par parties sur I_n*, montrer que pour tout entier naturel* $n\geq 3$*,*

on a : $nu_n+(n-1)u_{n-2}=\sqrt{2}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel $n\geq 3$*, on a :* $(2n-1)u_n\leq\sqrt{2}$.

Puis déterminer la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$