Matière : Mathématiques	الأكاديمية الجهوية للتربية والتكوين	Coefficient : 9
Classe : 2 AB S.M « B »	جهة مراكش – آسفي مؤسسة الجنوب	Durée : 4h

Exercice 1 (Structures) : (3,5 pts)

On considère dans l'espace vectoriel $(M_2(\mathbb{R}),+,\bullet)$ l'ensemble E des matrices : $M(a,b)=\begin{pmatrix} a & b \\ -4b & a+2b \end{pmatrix};(a,b)\in\mathbb{R}^2$ et on pose $J=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

0,25 — **1)** a- Montrer que $(E,+)$ est un groupe commutatif.

0,5 — b- Montrer que $(E,+,\bullet)$ est un espace vectoriel et déterminer sa dimension.

0,5 — **2)** a- Vérifier que $J^2=2J-4I$ et déduire que J admet un inverse que l'on déterminera.

0,25 — b- Montrer que E est une partie stable pour loi X dans $M_2(\mathbb{R})$.

3) On considère l'application : $\begin{array}{l} f:E\to\mathbb{C} \\ M(a,b)\mapsto(a+b)+ib\sqrt{3} \end{array}$

1,5 — a- Montrer que f est un isomorphisme de $(E,\times)$ vers $(\mathbb{C},\times)$.

0,5 — b- Déduire la structure de $(E,+,\times)$.

Exercice 1 (Arithmétique) : (3,5 pts)

1) On considère dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation $(E):71x-53y=1$.

0.25 — a- Vérifier que le couple $(3,4)$ est une solution particulière de (E).

0.5 — b- En déduire l'ensemble des solutions de l'équation (E).

2) Considérons dans $\mathbb{Z}$ l'équation : $(F):x^{29}\equiv 2[53]$.

Soit x une solution de (F).

0,5 — a- Montrer que 53 est premier et que $x\wedge 53=1$.

0,5 — b- Montrer que : $x^{261}\equiv x[53]$.

0,5 — c- Montrer que : $x\equiv 35[53]$.

0,25 — **3)** a- Vérifier que : $2^9\equiv 35[53]$

0,5 — b- Déduire l'ensemble des solutions de l'équation (F).

0,5 — **4)** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système : $(S):\begin{cases} x\equiv 34[71] \\ x^{29}\equiv 2[53] \end{cases}$.

	Exercice 2 : (3 pts) Dans l'ensemble $\mathbb{C}$, on considère l'équation suivante : $(E): Z^2-\left(1+im+\overline{m}\right)Z+\overline{m}+i\lvert m\rvert^2=0$ où $m\in\mathbb{C}^*\setminus\{i\}$.
0,25	1) a- Vérifier que $u=\overline{m}$ est solution de (E).
0,25	b- En déduire que l'autre solution de (E) est : $V=1+im$.
0,5	2) On suppose dans cette question que $m=e^{io}$ où $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$. Ecrire le nombre $\frac{V}{U}$ sous forme trigonométrique.
0,25	3) Dans le plan complexe (P), on considère les points A(U) et B(V). Déterminer l'ensemble des points M(m) tels que : $\left(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[\pi]$.
	4) On suppose que $m=a+\frac{1}{2}i$ où $a\in\mathbb{R}$ et on considère la transformation R qui lie tout point M(Z) avec le point M'(Z') tel que : $Z'=-iZ+1+2ia$
0,5	a- Montrer que R est une rotation dont on précisera le centre Ω et une mesure de son angle.
0,75	b- Montrer que : R(A)=B puis en déduire que : $\frac{Z_B-Z_\Omega}{Z_A-Z_\Omega}=-i$.
0,5	c- Montrer que les points O, A, B et Ω sont cocycliques où O est l'origine du repère de (P).
	Exercice 3 : (3 pts) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x)=e^{2x}-2e^x+2; x\leq 0 \\ f(x)=1+x\ln(1+x); x>0 \end{cases}$ On désigne par (C) la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormé $\left(o,\vec{i},\vec{j}\right)$.
0,25	**1)** a- Etudier les branches infinies de (C).
0,5	b- Montrer que f est dérivable en 0 et $f'(0)=0$.
0,5	c- Calculer $f'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty,0[$ et $]0,+\infty[$ puis dresser le tableau de variations de f.
0,25	**2)** Montrer que f admet sur $]-\infty,0[$ un unique point d'inflexion I que l'on précisera.
0,25	**3)** a- Montrer que l'équation $f(x)=2$ admet dans $]0,+\infty[$ une solution unique α et que $1<\alpha<2$.

0,5	b- Tracer la courbe (C).
0,25	**4)** Soit λ un réel strictement négatif. Calculer l'aire $A(\lambda)$ du domaine du plan limité par la courbe (C) et les droites d'équations : $x=\lambda$; $x=0$ et $y=2$.
	5) Soit g la restriction de f à l'intervalle $]-\infty,0]$.
0,25	a- Montrer que g est une bijection de $]-\infty,0]$ sur un intervalle J que l'on précisera.
0,25	b- Montrer que $\forall x\in J, g^{-1}(x)=\ln\left(1-\sqrt{x-1}\right)$.
	<u>Exercice 4</u> : **(4 pts)**
	Soit $n\in\mathbb{N}^*$, On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{*+}$ par : $$f(x)=\arctan(x)-\frac{n}{x}$$
0,5	**1)** Montrer que l'équation $f(x)=\frac{\pi}{2}-1$ admet une unique solution a_n dans $]0,+\infty[$.
0,75	**2)** Montrer que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n>n$ puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.
0,25	**3)** a- Vérifier que : $\forall x\in\mathbb{R}^{*+}, \arctan(x)<x$.
0,25	b- Vérifier que : $f\left(n+\sqrt{n}\right)=\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{1}{n+\sqrt{n}}\right)-\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}$.
1	c- En déduire que : $\forall n\in\mathbb{N}^*, a_n<n+\sqrt{n}$ puis déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{a_n}{n}\right)$.
0,75	**4)** Montrer : $\forall n\in\mathbb{N}^*, \arctan\left(\frac{1}{a_n}\right)=1-\frac{n}{a_n}$ en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty}(n-a_n)$.
0,5	**5)** Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} n^2(\arctan a_n-\arctan n)=1$.
	<u>Exercice 5</u> : **(6,5 pts)**
	<u>Partie 1</u> :
0,5	**1)** Calculer les limites : $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1-x}{x}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{e^x-1-x}{\ln(1+x)}\right)$.
	2) Pour tout nombre réel x, on pose : $I(x)=\int_0^x\frac{(x-t)^2}{2}e^t dt$.
1,5	a- Montrer sans calculer $I(x)$ que : $$\forall x\in\mathbb{R}^+, 0\le I(x)\le\frac{x^3}{6}e^x \text{ et } \forall x\in\mathbb{R}^-, \lvert I(x)\rvert\le\frac{\lvert x^3\rvert}{6}$$

0,5	b- A l'aide de deux intégrations par parties, montrer que : $I(x)=e^{x}-1-x-\dfrac{x^{2}}{2}$.
0,5	c- En déduire que : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-x-1}{x^{2}}=\dfrac{1}{2}$ et $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x}-1-x}{x\ln(1+x)}=\dfrac{1}{2}$
0,5	**3)** On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par : $f(x)=e^{x}\ln(1+x)-x$. Etudier les variations de f et déduire que : $\forall x\in\mathbb{R}^{+}, f(x)\geq 0$ (on admet que : $\forall x\in\mathbb{R}, e^{x}\geq 1+x$)
	<u>Partie 2</u> :
	Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}^{+}$ par : $\begin{cases} F(x)=\displaystyle\int_{x+1}^{e^{x}}\frac{dt}{\ln t}; x>0 \\ F(0)=0 \end{cases}$.
0,5	**1)** Montrer que : $\forall x\in\left]0,+\infty\right[; \dfrac{e^{x}-1-x}{x}\leq F(x)\leq\dfrac{e^{x}-1-x}{\ln(1+x)}$
0,5	**2)** Montrer que F est continue et dérivable à droite en 0.
0,75	**3)** Montrer que F est dérivable sur $\left]0,+\infty\right[$ et que : $$\forall x\in\left]0,+\infty\right[; F'(x)\leq\frac{f(x)}{x\ln(1+x)}$$
0,5	**4)** Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$ et dresser le tableau de variations de F.
0,75	**5)** Etudier la branche infinie de la courbe (C_F) de la fonction F au voisinage de $+\infty$ et construire (C_F).