



Exercice 1 Questions indépendantes (04 pts)

1. Déterminer la primitive L sur $]1; +\infty[$ de la fonction $\ell : x \mapsto x\sqrt[3]{x+1} + \frac{1}{x^2 + 2x + 2}$ telle que $L(0) = 1$.

a- En utilisant le T.A.F, montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N}^*) ; \frac{2}{3\sqrt[3]{k+1}} < \sqrt[3]{(k+1)^2} - \sqrt[3]{k^2} < \frac{2}{3\sqrt[3]{k}}$

b- En déduire que $(\forall n \in \mathbb{N}^*) ; \sum_{k=1}^n \frac{1}{3\sqrt[3]{k}} \geq \frac{3}{2} \left(\sqrt[3]{(n+1)^2} - 1 \right)$ puis déterminer la limite de la

suite $\sum_{k=1}^n \frac{1}{3\sqrt[3]{k}}$

Exercice 2 (16 pts)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{2}(x-1)\text{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right) ; x < 1 \\ f(x) = \sqrt[3]{1+(x-2)^3} ; x \geq 1 \end{cases}$$

Et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

0,5 1. a- Montrer que la fonction f est continue en 1.

1,5 b- Etudier la dérivabilité de f en 1, et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

1,5 2. Etudier les branches infinies de la courbe (C_f) .

1 3. a- Montrer que la fonction f est dérivable sur $]-\infty; 1[$ et $(\forall x \in]-\infty; 1[);$

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\text{Arctan}\left(\frac{1}{x-1}\right) - \frac{x-1}{1+(x-1)^2} \right)$$

- 1,5 **b-** En utilisant le T.A.F, montrer que $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; \frac{x}{1+x^2} < \text{Arctan}(x) < x$
- c-** En déduire que la fonction f est strictement décroissante sur $]-\infty; 1[$
- 1 **4.** Montrer que la fonction f est strictement croissante sur $[1; +\infty[$
- 1 **5.** Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $]0; 1[$
- 1 **6.** Tracer la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$. (On prend $\|\vec{i}\| = 1\text{cm}$
- 7.** Soit g la restriction de la fonction f à l'intervalle $[1; +\infty[$
- 1 **a-** Montrer que g réalise une bijection g^{-1} définie de $[1; +\infty[$ vers l'intervalle $[0; +\infty[$.
- 1 **b-** Tracer la courbe $(C_{g^{-1}})$
- 0,5 **c-** Montrer que la fonction g^{-1} est dérivable à droite en 0
- 0,75 **d-** Est-ce que la fonction g^{-1} est dérivable en 1 ? Justifier
- 8.** Soit (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n - 1) \text{Arctan}\left(\frac{1}{u_n - 1}\right) \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$
- 1 **a-** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < u_n < 1$.
- 1 **b-** Montrer que $(\forall x \in]0; 1[); |f'(x)| \leq \frac{\pi}{4}$.
- 1 **c-** Montrer que $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |u_{n+1} - \alpha| \leq \frac{\pi}{4} |u_n - \alpha|$..
- 1,25 **d-** En déduire que la suite (u_n) est convergente en précisant sa limite .