Examen national 2014
session de rattrapage

Exercice 1 : (2 points)

On considère trois urnes U, V et W. l'urne W contient une boule Noire et deux boules Blanches, et chacune des deux urnes U et V contient deux boules noires et deux boules Blanches.
On effectue l'expérience aléatoire suivante : On tire une boule de l'urne W ; si la boule triée est Blanche on la remettra dans l'urne U puis on en tire simultanément deux boules, et si la boule triée est Noire on la remettra dans l'urne V et on en tire simultanément deux boules

0,25 pt 1. *Qu'elle est la probabilité que le tirage soit effectuer de l'urne U ?*

0,75 pt 2. *Qu'elle est la probabilité de tirer deux boules Blanches à la fin de l'expérience ?*

1,00 pt 3. *Soit X la variable aléatoire égale au nombre des boules Blanches obtenues à la fin de l'expérience.*
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 2 : (1 points)

Soit n un entier naturel non nul, on pose $b_n = 2.10^n + 1$ et $c_n = 2.10^n - 1$.

0,50 pt 1) *Montrer que* $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ *puis en déduire que* b_n *et* c_n *sont premiers entre eux.*

0,50 pt 2) *Trouver un couple* $(x_n ; y_n)$ *de* $\mathbb{Z}^2$ *vérifiant*
$$b_n.x_n + c_n.y_n = 1.$$

Exercice 3 : (4 points)

On pose $J =]-1;1[$.

I. *Pour tous a et b de l'intervalle J on pose :*
$$a * b = \frac{a+b}{1+ab}$$

0,75 pt 1) *Vérifier que :* $(\forall (a;b) \in J^2)\ ;1+ab>0$, *puis en déduire que* $*$ *est une loi de composition interne sur J.*

0,50 pt 2) a) *Montrer que la loi* $*$ *est commutative et associative.*

0,25 pt b) *Montrer que l'ensemble* $(J,*)$ *admet un élément neutre à déterminer.*

0,50 pt c) *Montrer que* $(J,*)$ *est un groupe commutatif.*

II. *On considère l'application f définie sur R par :*
$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

0,75 pt 1) *Montrer que f est une bijection de IR vers J.*

0,50 pt 2) *Soit g la bijection réciproque de f.*
(la détermination de g n'est pas demandée)
Pour tous x et y de l'intervalle J on pose :
$a \perp b = f\left(g(x) \times g(y)\right)$.
Montrer que f est un homomorphisme de $(IR^*, \times)$ *dans* $(J^*, \perp)$ *où* $J^* = J - \{0\}$.

0,50 pt 3) *On rappelle que* $(IR^*, \times)$ *est un groupe commutatif et on admet que* $\perp$ *est distributive par rapport à _ dans J.*
Montrer que $(J, *, \perp)$ *est un corps commutatif.*

Exercice 4 : (3,25 points)

1,00 pt I. 1) *Résoudre dans* $\mathbb{C}$ *l'équation :* $z^2 + i = 0$.
(soit a la solution vérifiant $\mathrm{Re}(a) > 0$ *)*

0,50 pt 2) a) *Déterminer le module et l'argument du nombre complexe* $1+a$.

0,50 pt b) *En déduire que :* $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

0,50 pt c) *Vérifier que :* $(1+a)(1-a) = 1+i$ *puis en déduire la forme trigonométrique du nombre* $(1-a)$.

II. *Le plan complexe est rapporté au repère orthonormé direct* $(O;\vec{u};\vec{v})$.
On considère les points A, B, M et M′ d'affixes respectives a , $-a$, z *et* z' .
Et on suppose que $zz' + i = 0$

0,25 pt 1) *Soit N le point d'affixe* $\bar{z}$ *le conjugué de z*
Montrer que les deux droites (ON) *et* (OM') *sont perpendiculaires.*

0,25 pt 2) a) *Montrer que :* $z' - a = i\frac{z-a}{az}$.

0,50 pt b) *Montrer que si* $z \neq -a$ *alors* $z' \neq -a$ *et* que $\left(\frac{z'-a}{z'+a}\right)=-\left(\frac{z-a}{z+a}\right)$.

0,50 pt 3) Supposons que les points A, B et M ne sont pas alignés. Montrer que le point M' appartient au cercle circonscrit au triangle ABM.

Exercice 5 : (7,5 points)

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{-\ln(x)}{\sqrt{x}}$

1,00 pt I- 1) Calculer les deux limites : $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0,75 pt 2) Calculer $f'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis en déduire les variations de f sur $]0;+\infty[$.

3) Pour tout n de IN^*, on considère la fonction g_n définie sur l'intervalle $]0;1[$ par: $g_n(x)=f(x)-x^n$

0,50 pt a) Montrer que la fonction g_n est strictement décroissante sur $]0;1[$.

0,50 pt b) En déduire que pour tout n de on a :

$(\exists!\alpha_n\in[0;\,1])\ ;\ f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$.

0,50 pt c) Montrer que pour tout n de IN^* on a : $g_n(\alpha_{n+1})<0$.

0,75 pt d) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n\geq 1}$ est strictement croissante, puis en déduire qu'elle est convergente.

4) On pose $l=\lim\limits_{n\to+\infty}\alpha_n$

0,25 pt a) Vérifier que : $0<\alpha_1\leq l\leq 1$.

0,25 pt b) Vérifier que : $(\forall n\in IN^*)$; $h(\alpha_n)=n$

où $h(x)=-\frac{1}{2}+\frac{\ln(-\ln(x))}{\ln(x)}$.

0,25 pt c) Montrer que $l=1$.

0,25 pt d) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}(\alpha_n)^n=0$.

0,25 pt II- 1) a) Étudier le signe de l'intégrale : $\int_x^1 f(t)\,dt$ pour tout x de IR_+^*.

0,50 pt b) En intégrant par partie montrer que :

$(\forall x>0)\ ;\ \int_x^1 f(t)\,dt=4-4\sqrt{x}+2\sqrt{x}\,\ln x$

0,50 pt c) En déduire l'aire du domaine délimité par la courbe (C) et les droites d'équations $x=1$, $x=e^2$ et $y=0$.

2) Pour tout entier non nul n on pose :

$u_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k=n} f\left(\frac{k}{n}\right)$

0,50 pt a) Montrer que pour tout entiers n et k tel que $n\geq 2$ et $1\leq k\leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k+1}{n}\right)\leq\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)\,dx\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

0,50 pt b) Montrer que : $(\forall n\in IN^*)$;

$$\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt\leq u_n\leq\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)+\int_{\frac{1}{n}}^1 f(t)\,dt$$

0,25 pt c) En déduire que : $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=4$.

Exercice 6 : (2,5 points)

On considère la fonction numérique g définie sur $[0;+\infty[$ par : $g(x)=\int_{\sqrt{x}}^1 e^{-t^2}\,dt$ Pour tout x de IR on pose : $k(x)=\int_1^x e^{-t^2}\,dt$

0,25 pt 1) a) Vérifier que pour tout x de $[0;+\infty[$ on a : $g(x)=-k(\sqrt{x})$.

0,50 pt b) Montrer que g est continue sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et dérivable sur l'intervalle $]0;+\infty[$.

0,50 pt c) Calculer $g'(x)$ pour tout x de $]0;+\infty[$, puis en déduire que g est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$.

0,75 pt 2) a) Montrer que : $(\forall x>0)$

; $\frac{g(x)-g(0)}{x}<-\frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$

0,50pt b) En déduire que g n'est pas dérivable à droite en zéro et donner l'interprétation graphique du résultat obtenu.