

Exercice 1

Une urne contient 8 balles : 4 balles rouges et 4 balles vertes (Ces balles sont indiscernables au toucher). On tire simultanément et au hasard 3 boules de l'urne.

Soit A l'événement « les deux balles tirées de l'urne sont de même couleur ».

Montrer que: $P(A) = \frac{4}{23}$

2. Soit X la variable aléatoire qui associe tout tirage par le nombre des balles rouges restantes dans l'urne après le tirage.

a. Montrer que $\{0;1;2;3\}$ est ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire X

b. Montrer que: $P(X = 3) = \frac{2}{23}$

c. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

Exercice 2

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$, on considère les points suivants : A(1;0;-1) ; B(-2;1;1); C(0;3;-3) et D(2;1;0).

1. Déterminer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

2. Calculer la distance BC et en déduire la distance du point A à la droite (BC).

3. Montrer que l'équation du plan (ABC) est $x + y + z = 0$.

4. Montrer que la droite (AD) est perpendiculaire au plan (ABC) et Ecrire une représentation paramétrique de la droite (AD).

5. Soit (S) la sphère d'équation: $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - z + 1 = 0$

a. Déterminer le centre et le rayon de la sphère (S)

b. Montrer que le plan (ABC) ne coupe pas la sphère (S)

c. Déterminer l'intersection de la droite (AD) et la sphère (S)

Exercice 3

On considère les nombres complexes a ; b et c telles que : $a = (2 + \sqrt{3}) + i$; $b = 1 - (2 + \sqrt{3})i$ et $c = \sqrt{3} + i$.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2(2 + \sqrt{3})z + 4(2 + \sqrt{3}) = 0$

a. Montrer que a est une solution de cette équation.

b. En déduire que: $a^2 = 2(\sqrt{3} + 2)c$

c. Déterminer le module et l'argument du nombre complexe c.

d. En déduire la forme trigonométrique au nombre complexe a.

e. Montrer que : $\arg \frac{a}{b} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

2. On considéré dans le plan complexe muni repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$ les points A ; B et C d'affixes respectifs a^2 ; b^2 et c.

a. Montrer que le point A est l'image du point B par la rotation de centre O et d'angle π .

b. Déterminer le centre et le rayon du cercle passant par les points A; B et C.

Exercice 4

On considère le réel suivant $a = \sqrt[3]{\frac{1}{2}}$

soit la suite numérique (u_n) définie par :
$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ u_{n+1} = au_n + 1 \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

1. Montrer que $u_0 = -a^3$ et calculer u_1 en fonction de a .
2. Soit la Suite numérique (v_n) définie par : $v_n = u_{n+1} - u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une Suite géométrique de raison a .
 - b. calculer v_0 en fonction de a .
 - c. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $u_n - u_0 = v_0 + v_1 + \dots + v_{n-1}$
3. Soit $n \in \mathbb{N}$
 - a. Déterminer v_n en fonction de n et de a .
 - b. En déduire u_n en fonction de n et de a .
4. Calculer la limite de la suite (u_n) .

Problème

A / On considère la fonction numérique f définie sur $] -1; +\infty[$ par: $f(x) = e^x - \ln(x+1) - 1$.

1. a. Montrer que: $f'(x) = x \left(\frac{e^x - 1}{x} + \frac{1}{x+1} \right)$; pour tout x de $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$.
b. Montrer que : $\frac{e^x - 1}{x} > 0$ pour tout x de $] -1; 0[\cup] 0; +\infty[$
c. En déduire que f est strictement croissante sur $] 0; +\infty[$ et strictement décroissante sur $] -1; 0[$.
2. Montrer que : $f(x) > 0$ pour tout x de $] -1; +\infty[$.

B / On considère la fonction numérique g définie sur $] -1; +\infty[$ par :

$$\begin{cases} g(x) = e^x - (x+1)\ln(x+1) - 2 & \text{si } x \neq -1 \\ g(-1) = e^{-1} - 2 \end{cases}$$

- a. Montrer que la fonction g est continue à droite en -1
- b. Montrer que: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{e^x - e^{-1}}{x+1} = e^{-1}$; et en déduire: $\lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{g(x) - g(-1)}{x+1} = +\infty$
Donner une Interprétation géométrique au résultat obtenu.
2. a. Montrer que : $g(x) = x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - \left(\frac{x+1}{x} \right) \left(\frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) \right) - 2$; pour tout x de $] 0; +\infty[$.
b. En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x}$ interpréter géométriquement les résultats obtenus.
3. Montrer que: $g'(x) = f(x)$ pour tout x de $] -1; +\infty[$ et Dresser le tableau de variation de g .
4. a. Montrer qu'il existe un nombre réel strictement négatif unique α tel que $g(\alpha) = 0$.
b. Montrer que $g(1) < 0$ et en déduire que: $\alpha > 1$.
c. Montrer que $g(2) > 0$ et en déduire que: $\alpha < 2$.
5. Tracer la courbe représentative de la fonction g dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

6. a. En utilisant une intégration par partie montrer que : $\int_0^1 (x+1)\ln(x+1) = 2\ln 2 - \frac{3}{4}$

b. Calculer l'aire du domaine du plan limité par la courbe de f ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

WWW.GUESSMATHS.CO