

Exercice 1

$$(u_n) \begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$$

1) Pour $n = 0$

$$u_0 = 1 \text{ donc } : u_0 < 2$$

Pour $n \in \mathbb{N}$

Supposons que : $u_n < 2$ et montrons que : $u_{n+1} < 2$.

Calculons : $u_{n+1} - 2$

$$\begin{aligned} \text{On a : } u_{n+1} - 2 &= \frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 2 \\ &= \frac{3u_n - 8 - 2(2u_n - 5)}{2u_n - 5} \\ &= \frac{3u_n - 8 - 4u_n + 10}{2u_n - 5} \\ &= \frac{2 - u_n}{2u_n - 5} \end{aligned}$$

$$\text{Et } u_n < 2 \Rightarrow \begin{cases} 2 - u_n > 0 \\ 2u_n - 5 < 0 \end{cases}$$

$$\text{Alors : } u_{n+1} - 2 < 0$$

$$\text{Par suite } u_{n+1} < 2$$

Conclusion.

On a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n < 2$.

$$2) \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} ; v_n = \frac{u_n - 3}{u_n - 2}$$

$$\begin{aligned} \text{a) pour tout } n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } v_{n+1} - v_n &= \frac{u_{n+1} - 3}{u_{n+1} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{\frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 3}{\frac{3u_n - 8}{2u_n - 5} - 2} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{3u_n - 8 - 3(2u_n - 5)}{2u_n - 5} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{3u_n - 8 - 6u_n + 15}{2u_n - 5} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \\ &= \frac{-3u_n + 7}{2u_n - 5} - \frac{u_n - 3}{u_n - 2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{7-3u_n}{2-u_n} - \frac{u_n-3}{u_n-2} \\
 &= \frac{7-3u_n+u_n+3}{2-u_n} \\
 &= \frac{4-2u_n}{2-u_n} \\
 &= 2
 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \boxed{v_{n+1} - v_n = 2}$

D'où (v_n) est une suite arithmétique de raison $r = 2$.

b) pour tout $n \in \mathbb{N}$; on a : $v_n = v_0 + n \times r$ et $v_0 = \frac{u_0-3}{u_0-2} = 2$

donc $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \boxed{v_n = 2(1+n)}$.

c) pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $v_n = \frac{u_n-3}{u_n-2} \Rightarrow (u_n-2)v_n = u_n-3$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow u_n v_n - u_n = 2v_n - 3 \\
 &\Rightarrow u_n(v_n - 1) = 2v_n - 3 \\
 &\Rightarrow u_n = \frac{2v_n - 3}{v_n - 1} \\
 &\Rightarrow u_n = \frac{2 \times 2(1+n) - 3}{2(1+n) - 1} \\
 &\Rightarrow u_n = \frac{4n+1}{2n+1}
 \end{aligned}$$

Donc : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; \boxed{u_n = \frac{4n+1}{2n+1}}$

c) On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4n+1}{2n+1}$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n\left(4 + \frac{1}{n}\right)}{n\left(2 + \frac{1}{n}\right)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{4 + \frac{1}{n}}{2 + \frac{1}{n}} = 2 \quad \left(\text{car } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0\right)
 \end{aligned}$$

Donc $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 2}$

Exercise 2:

1) $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

On a : $\Delta = (-\sqrt{2})^2 - 4 = -2$

Donc l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :

$$z_1 = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } z_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Donc : $S = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right\}$

2) a) On pose : $a = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$ et $\cos \frac{\pi}{4} = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

donc : $a = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$

D'après la formule de Moivre on a : $a^{2020} = e^{i2020 \times \frac{\pi}{4}} \left(\cos \left(2020 \times \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(2020 \times \frac{\pi}{4} \right) \right)$
 $= \cos(505 \times \pi) + i \sin(505 \times \pi)$
 $= \cos(2 \times 252 \times \pi + \pi) + i \sin(2 \times 252 \times \pi + \pi)$
 $= \cos(\pi) + i \sin(\pi) = -1$

Donc : $a^{2020} \in \mathbb{R}$

b) soit : $b = \cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}$

D'après la formule de Moivre on a : $b^2 = |b|^2 \left(\cos \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(2 \times \frac{\pi}{8} \right) \right)$
 $= \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$
 $= a$

Donc $b^2 = a$.

3) Soient les points A(a); B(b) et C(c=1) ; la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{8}$

a) on a : $M'(z') = R(M(z)) \Leftrightarrow (z' - 0) = (z - 0)e^{i\frac{\pi}{8}}$
 $\Leftrightarrow z' = z \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$
 $\Leftrightarrow z' = bz$

D'où : $M'(z') = R(M(z)) \Leftrightarrow z' = bz$.

b) •) On a C'(c') image de C(c=1) par R ; donc
 $c' = bc \Leftrightarrow c' = b$.

Donc B est l'image de C par R.

•) On a $a = b^2$ (d'après question 2/b) ; donc $a = b.b$; d'où A est l'image de B par R.

4) a) On a : $|a - b| = |b^2 - b|$
 $= |b(b - 1)|$
 $= |b||b - 1|$
 $= |b - c| \quad (\text{car } |b| = 1 \text{ et } c = 1)$

Donc : $\boxed{|a-b| = |b-c|}$

On en déduit que : $BA=BC$

Par suite le triangle ABC est isocèle.

$$\begin{aligned} \text{b) on a : } (\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) &\equiv \arg\left(\frac{c-b}{a-b}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{1-b}{b^2-b}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(\frac{1-b}{-b(1-b)}\right)[2\pi] \\ &\equiv \arg\left(-\frac{1}{b}\right)[2\pi] \\ &\equiv \pi + \arg\left(\frac{1}{b}\right)[2\pi] \\ &\equiv \pi - \arg(b)[2\pi] \\ &\equiv \pi - \frac{\pi}{8}[2\pi] \\ &\equiv \frac{7\pi}{8}[2\pi] \end{aligned}$$

D'où : $\boxed{(\overrightarrow{BA}; \overrightarrow{BC}) \equiv \frac{7\pi}{8}[2\pi]}$

5) $T_{\bar{u}} ; \bar{u}(u=1)$

a) On a : $D = T_{\bar{u}}(A) \Leftrightarrow d = a + u$
 $\Leftrightarrow \boxed{d = b^2 + 1}$

b) On a : $\frac{b^2+1}{b} = \frac{b^2}{b} + \frac{1}{b}$
 $= b + \frac{\bar{b}}{b\bar{b}} \text{ (Or } b\bar{b} = |b|^2 = 1)$
 $= b + \bar{b}$

Alors $\boxed{\frac{b^2+1}{b} = b + \bar{b}}$

Par suite $\frac{b^2+1}{b} = \frac{d}{b}$
 $= \frac{d-0}{b-0}$
 $= 2\text{Re}(b) \in \mathbb{R}$

Donc les points O B et D sont alignées.

Exercice 3

$(\forall x \in \mathbb{R}) : u(x) = e^x - 2x + 2 - 3e^{-x}$

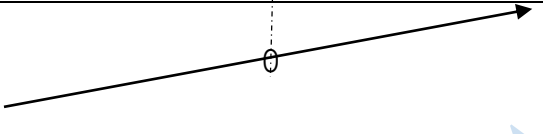
1) a) pour tout $x \in \mathbb{R}$; on a : $u'(x) = (e^x - 2x + 2 - 3e^{-x})'$

$$\begin{aligned}
&= e^x - 2 + 3e^{-x} \\
&= (e^{2x} - 2e^x + 3)e^{-x} \\
&= (e^{2x} - 2e^x + 1 + 2)e^{-x} \\
&= ((e^x - 1)^2 + 2)e^{-x} \\
&= \frac{(e^x - 1)^2 + 2}{e^x}
\end{aligned}$$

Donc: $(\forall x \in \mathbb{R}); u'(x) = \frac{(e^x - 1)^2 + 2}{e^x}$

b) $u'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$; (Car $(e^x - 1)^2 > 0$ et $e^x > 0$)

D'où le tableau de variation de u .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$u'(x)$		+	
$u(x)$			

c) On a : $u(0) = 0$

Donc : $\bullet (\forall x \in]-\infty; 0]) \Rightarrow x \leq 0$

$\Rightarrow u(x) \leq u(0)$ (Car u est croissante sur $\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \boxed{u(x) \leq 0}$$

$\bullet (\forall x \in [0; +\infty[) \Rightarrow x \geq 0$

$\Rightarrow u(x) \geq u(0)$ (Car u est croissante sur $\mathbb{R}$)

$$\Rightarrow \boxed{u(x) \geq 0}$$

D'où : $\begin{cases} (\forall x \in]-\infty; 0]); \boxed{u(x) \leq 0} \\ (\forall x \in [0; +\infty[); \boxed{u(x) \geq 0} \end{cases}$

2) $(\forall x \in \mathbb{R}); v(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3$

a) Soit $x \in \mathbb{R}$; on a : $v(x) = e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3$
 $= e^x(e^x - 2x + 2 - 3e^{-x})$
 $= e^x \cdot u(x)$

Donc : $(\forall x \in \mathbb{R}); \boxed{v(x) = e^x \cdot u(x)}$.

b) le signe de $v(x)$ est celui de $u(x)$ (car $e^x > 0$)

Donc : $\begin{cases} (\forall x \in]-\infty; 0]); \boxed{v(x) \leq 0} \\ (\forall x \in [0; +\infty[); \boxed{v(x) \geq 0} \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 3) \text{ a) On a pour tout } x \in \mathbb{R} : w'(x) &= \left(\frac{1}{2}e^{2x} + (4-2x)e^x - 3x \right)' \\
 &= e^{2x} + (4-2x)'e^x + (4-2x)e^x - 3 \\
 &= e^{2x} - 2e^x + 4e^x - 2xe^x - 3 \\
 &= e^{2x} - 2xe^x + 2e^x - 3 \\
 &= v(x)
 \end{aligned}$$

Donc W est une primitive de v sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) On a : } \int_0^2 v(x) dx &= [w(x)]_0^2 \\
 &= w(2) - w(0)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet) w(2) &= \frac{1}{2}e^{2 \times 2} + (4 - 2 \times 2)e^2 - 3 \times 2 \\
 &= \frac{1}{2}e^4 - 6
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \bullet) w(0) &= \frac{1}{2}e^{2 \times 0} + (4 - 2 \times 0)e^0 - 3 \times 0 \\
 &= \frac{1}{2} + 4 \\
 &= \frac{9}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{Donc } \int_0^2 v(x) dx &= \frac{1}{2}e^4 - 6 - \frac{9}{2} \\
 &= \frac{1}{2}e^4 - \frac{21}{2}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } \boxed{\int_0^2 v(x) dx = \frac{1}{2}e^4 - \frac{21}{2}}$$

c) Dressons le tableau de variation de $w : (\forall x \in \mathbb{R}) ; w'(x) = v(x)$

D'où le tableau de variation de w

x	$-\infty$ $+\infty$		0
$w'(x)$	$-$	0	$+$
$w(x)$			

D'après le tableau de variation de la fonction w la valeur $w(0)$ est un minimum

absolue de w sur $\mathbb{R}$, et $w(0) = \frac{9}{2}$

Problème

$$\text{I. } (\forall x \in]0; +\infty[) ; g(x) = e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2.$$

$$1) \text{ pour tout } x \in]0; +\infty[\text{ on a : } g'(x) = \left(e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2 \right)'$$

$$= -\left(e^{1-x} + \frac{1}{x^2}\right)$$

Donc: $(\forall x \in]0; +\infty[) ; \boxed{g'(x) = -\left(e^{1-x} + \frac{1}{x^2}\right)}$.

Or $(\forall x \in]0; +\infty[); \begin{cases} e^{1-x} > 0 \\ \frac{1}{x^2} > 0 \end{cases} \Rightarrow e^{1-x} + \frac{1}{x^2} > 0$

D'où $(\forall x \in]0; +\infty[); \boxed{g'(x) < 0}$

2) d'après la question précédente, g est strictement décroissante sur $]0; +\infty[$ et $g(1) = 0$;

donc : •) $(\forall x \in]0; 1]) \Rightarrow x \leq 1$

$$\Rightarrow g(x) \geq g(1)$$

$$\Rightarrow g(x) \geq 0$$

•) $(\forall x \in [1; +\infty[) \Rightarrow x \geq 1$

$$\Rightarrow g(x) \leq g(1)$$

$$\Rightarrow g(x) \leq 0$$

D'où le tableau de signe $g(x)$:

x	0	1	$+\infty$
g(x)	+	0	-

II. $(\forall x \in]0; +\infty[); f(x) = (1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x$

1) On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} ((1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x) = +\infty$

(Car $\lim_{x \rightarrow 0^+} ((1-x)e^{1-x}) = e$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-x^2 + 5x - 3) = -3$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} (-2\ln x) = +\infty$)

D'où : $\boxed{\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty}$

D'où (C) admet une asymptote vertical d'équation $x = 0$.

2) a) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left((1-x)e^{1-x} - x^2 \left(1 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} - 2\frac{\ln x}{x^2} \right) \right) = -\infty$$

(Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2} \right) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x^2} \right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x)e^{1-x}) = \lim_{t \rightarrow -\infty} (te^t) = 0$)

D'où : $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$

a) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1-x}{x} \right) e^{1-x} - \frac{x^2}{x} + \frac{5x}{x} - \frac{3}{x} - 2\frac{\ln x}{x} \right)$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\left(\frac{1-x}{x} \right) e^{1-x} - x + 5 - \frac{3}{x} - 2\frac{\ln x}{x} \right) = -\infty$$

(Car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-x}{x} = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-x + 5 - \frac{3}{x} \right) = -\infty$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$)

D'où : $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

3) a) Pour tout $x \in]0; +\infty[$ on a : $f'(x) = ((1-x)e^{1-x} - x^2 + 5x - 3 - 2\ln x)'$

$$= (1-x)' e^{1-x} + (1-x)(e^{1-x})' - 2x + 5 - \frac{2}{x}$$

$$= -e^{1-x} - (1-x)e^{1-x} - 2x + 5 - \frac{2}{x}$$

$$= (-1-1+x)e^{1-x} - 2x + 4 + 1 - \frac{2}{x}$$

$$= (x-2)e^{1-x} + 2(2-x) + \frac{x-2}{x}$$

$$= (x-2)\left(e^{1-x} + \frac{1}{x} - 2\right)$$

$$= (x-2)g(x)$$

D'où : $(\forall x \in]0; +\infty[); f'(x) = (x-2)g(x)$.

b) Tableau de signe de $f'(x)$ sur $]0; +\infty[$

x	0	1	2	$+\infty$
$(x-2)$		-	0	+
$g(x)$	+	0	-	
$f'(x)$	-	0	+	-

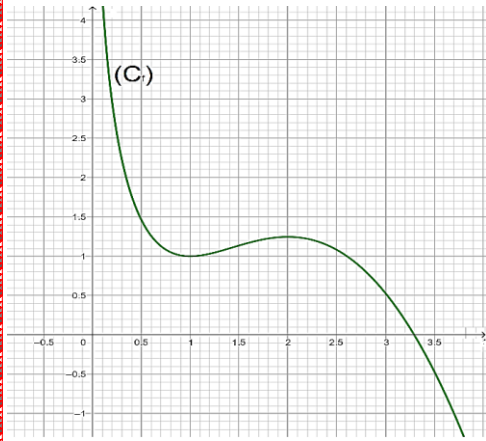
Donc f est décroissante sur l'intervalle $]0; 1]$ et sur l'intervalle $[2; +\infty[$; et f est croissante sur l'intervalle $[1; 2]$.

c) Tableau de variation de f sur $]0; +\infty[$.

x	0	1	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	$+\infty$	$f(1)$	$f(2)$	$-\infty$	

4) f est Continue et strictement décroissante sur l'intervalle $[3; 4]$ et $f(3) \times f(4) < 0$, donc d'après théorème des valeurs intermédiaires l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique dans l'intervalle $[3; 4]$.

5) Construction de (C) dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$



III. On pose pour tout $x \in [1; 2]$: $h(x) = f(x) - x$.

1) a) D'après le tableau de variation de h ; on a :
 $(\forall x \in [1; 2]) ; h(x) \leq 0 \Rightarrow (\forall x \in [1; 2]) ; f(x) - x \leq 0$
 $\Rightarrow (\forall x \in [1; 2]) ; f(x) \leq x$

2) $(u_n) : \begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} ; (\forall n \in \mathbb{N})$

a) Montrons récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2$

Pour $n = 0$

On a $u_0 = 2$; donc $1 \leq u_0 \leq 2$

Soit $n \in \mathbb{N}$

Supposons que $1 \leq u_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq u_{n+1} \leq 2$.

On a : $1 \leq u_n \leq 2$ et f est strictement croissante sur $[1; 2]$ donc :

$$f(1) \leq f(u_n) \leq f(2) \Rightarrow 1 \leq u_{n+1} \leq 2$$

(car $f(1) = 1$ et $f(2) = 1,25 \leq 2$)

Conclusion :

On a montré par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 1 \leq u_n \leq 2$

b) d'après la question 1) a) on a : $(\forall x \in [1; 2]) ; f(x) \leq x$ et comme $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_n \in [1; 2]$

Alors $(\forall n \in \mathbb{N}) ; f(u_n) \leq u_n$

D'où : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; u_{n+1} \leq u_n$

Donc la suite (u_n) est décroissante.

c) (1) est une suite décroissante minorée par 1; donc elle est convergente, et

Comme : $\blacktriangleright f$ est continue sur $[1; 2]$

$$\blacktriangleright f([1; 2]) \subset [1; 2]$$

$$\blacktriangleright u_0 \in [1; 2]$$

$$\blacktriangleright u_{n+1} = f(u_n)$$

$\blacktriangleright (u_n)$ est convergente

Alors si $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$; l est solution de l'équation $f(x) = x$

D'après la question 1)b) 1 est la seule solution de l'équation $f(x) = x$ dans $[1;2]$; et

$l \in [1;2]$; d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1$.