



Série n° 2 d'exercices corrigés « Fonction Logarithmique »

Exercice n°1.

Etudier le signe des expressions suivantes :

$$A(x) = \ln x(\ln x + 1) \quad B(x) = 2x \ln(1 - x)$$

$$C(x) = -x^2 \ln(x + 1)$$

Correction Exercice n°1.

■ $A(x) = \ln x(\ln x + 1)$ On étudiera le signe $A(x)$ sur $D_A =]0; +\infty[$

Tableau de signe de $A(x)$

x	0	$\frac{1}{e}$	1	$+\infty$
$\ln x + 1$	-	0	+	+
$\ln x$	-	-	0	+
$A(x)$	+	0	-	+

■ $B(x) = 2x \ln(1 - x)$ On étudiera le signe $B(x)$ sur $D_A =]-\infty; 1[$

Tableau de signe de $B(x)$

x	$-\infty$	0	1
$2x$	-	0	+
$\ln(1-x)$	+	0	-
$B(x)$	-	0	-

■ $C(x) = -x^2 \ln(x + 1)$ On étudiera le signe $B(x)$ sur $D_A =]-1; +\infty[$

Tableau de signe de $C(x)$

x	-1	0	$+\infty$
$-x^2$	-	0	-
$\ln(x+1)$	-	0	+
$C(x)$	+	0	-

Exercice n°2.

Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

$$1) f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4) \quad 2) f(x) = \ln\left(\frac{4 - x^2}{x}\right) \quad 3) f(x) = \ln(4 - x^2) - \ln x$$

$$4) f(x) = \ln(x^2 - 4) - \ln(-x)$$

Correction Exercice n°2.

$$1) f(x) = \ln(x^2 + 3x - 4)$$

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2 + 3x - 4 > 0$ en cherchant les racines du polynôme $P(x) = x^2 + 3x - 4$ on obtient le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	-4	1	$+\infty$
$x^2 + 3x - 4$	+	0	-	+

$$D'ou : D_f =]-\infty; -4[\cup]1; +\infty[$$

$$2) f(x) = \ln\left(\frac{4 - x^2}{x}\right)$$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x		-		+	
$4-x^2$	-	0	+	0	-
$\frac{4-x^2}{x}$	+	0	-	0	-

Etudions le signe de $\frac{4-x^2}{x}$

D'où : $D_f =]-\infty; -2[\cup]0; 2[$

3) $f(x) = \ln(4-x^2) - \ln x$

$x \in D_f \Leftrightarrow 4-x^2 > 0 \text{ et } x > 0$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x					+
$4-x^2$	-	0	+	0	-

D'où : $D_f =]0; 2[$

4) $f(x) = \ln(x^2-4) - \ln(-x)$

x	$-\infty$	-2	0	2	$+\infty$
x					
x^2-4	+	0	-	0	+

$x \in D_f \Leftrightarrow x^2-4 > 0 \text{ et } x < 0$

D'où : $D_f =]-\infty; -2[$

Exercice n°3.

Déterminer les limites suivantes :

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x)$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x)$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x)$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x) \ln x)$

6) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 4 + \ln x)$

7) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right)$

8) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+2x)}{x} \right)$

Correction Exercice n°3.

1) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2 + \ln x) = +\infty$

Par somme des deux limites $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x^2) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$

2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln 2 - 3 \ln x) = -\infty$

3) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \ln x^2 = +\infty$ On pose $t = x^2$ et on utilise $\lim_{t \rightarrow +\infty} \ln t = +\infty$

4) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \ln x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \left(1 - \frac{\ln x}{x} \right) \right) = +\infty$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} \right) = 0$

5) $\lim_{x \rightarrow +\infty} ((1-x) \ln x) = -\infty$

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} (1-x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x) = +\infty$ par produit on obtient $-\infty$.

$$6) \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 4 + \ln x) = -\infty$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = F.I (+\infty \times 0)$$

On pose : $X = \frac{1}{x}$ $x \mapsto +\infty$ alors $X \mapsto 0^+$ donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{X} \ln(1 + X) \right) \\ &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1 \end{aligned}$$

$$d'où : \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right) = 1$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + 2x)}{x} \right) = F.I \left(\frac{0}{0} \right)$$

On pose : $X = 2x$ $x \mapsto 0$ alors $X \mapsto 0$ donc :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1 + 2x)}{x} \right) &= \lim_{X \rightarrow 0} \left(2 \times \frac{\ln(1 + X)}{X} \right) \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \left(2 \times \frac{\ln(1 + X)}{X} \right) = 2 \end{aligned}$$

$$car \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1$$