Série n°18 d'exercices sur les complexes **2éme Bac SM**

Exercice 1 (Calculer, Raisonner).

1. On considère l'équation du second degré à coefficients complexes : $(E): z^2-(6+2i)z+7+6i=0$.

   a. Montrer que, pour tout nombre complexe z, $z^2-(6+2i)z=(z-(3+i))^2-8-6i$.

   b. En déduire que l'équation (E)équivalente à$(z-(3+i))^2=1$.

   c. Résoudre alors l'équation (E)dans$\mathbb{C}$.

2. En appliquant une méthode analogue, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation du second degré à coefficients complexes: $(E'): z^2+(2+4i)z+6+4i=0$.

Exercice 2 (Chercher, Représenter.)

Équation à paramètre

On considère le polynôme P à coefficients réels défini sur $\mathbb{C}$ par $P(z)=z^2-2z+9$?.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z)=6$.

2. Soit m un réel. On considère l'équation (E): $P(z)=m$ d'inconnue z dans $\mathbb{C}$.

Pour quelles valeurs de m l'équation (E)admet-elle deux solutions complexes conjuguées? Justifier.

3. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On écrit $z=x+iy$ et $z'=P(z)=x'+iy'$ où $x;y;x'$ et y' désignent quatre réels.

   a. Exprimer la forme algébrique de $P(z)$en fonction de x et y.

   b. Déterminer l'ensemble E des points $M(x;y)$ tels que z' soit un réel.

Exercice 3 (Raisonner, Représenter).

Suite de nombres complexes

Soit α un nombre complexe non nul et différent de 1.

On définit la suite (z_n) de nombres complexes par $z_0=0$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1}=\alpha z_n-i$.

1. a. Calculer z_1 ; z_2 et z_3 en fonction de α .

   b. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{\alpha-1}\times i$

2. Uniquement dans cette question, on pose $\alpha=i$.

   a. Montrer que $z_4=0$.

   b. Pour tout entier naturel n, exprimer z_{n+4}en fonction de n, puis en fonction de z_n.

   c. On munit le plan d'un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$.

On pose, pour tout entier naturel n, $z_n=x_n+iy_n$, et on appelle P_n les points de coordonnées $(x_n;y_n)$.

Placer les points P_0 ; P_1 ; P_2 ;P_3et P_4 dans le repère $(O;\vec{u};\vec{v})$.