Méthode Signe d'une expression

Exemple 1

f(x) est définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = e^x + \frac{1}{3}e^{-\frac{1}{3}x}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^x > 0$ et $e^{-\frac{1}{3}x} > 0$ donc $f(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$.

Exemple 2

f(x) est définie sur $\mathbb{R}$ *par* $f(x) = 8x(x+1)e^{2x}$

Pour tout x de $\mathbb{R}$, $e^{2x} > 0$ donc le signe de f(x) sur $\mathbb{R}$ est celui du polynôme du second degré $x(x+1)$ qui a pour racines -1 et 0. On en déduit :

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Exemple 3

f(x) est définie sur $]0\,;+\infty[$ *par* $f(x) = \dfrac{3+\ln x}{x^2}$

Le signe de f(x) sur $]0\,;+\infty[$ est celui de $3 + \ln x$ sur cet intervalle.
Il suffit alors de résoudre :

- l'équation $3 + \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = -3 \Leftrightarrow x = e^{-3}$
- l'inéquation $3 + \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x > -3 \Leftrightarrow x > e^{-3}$

On en déduit :

x	0		e^{-3}		$+\infty$
$f(x)$	$\|\|$	$-$	0	$+$	

Exemple 4

f(x) est définie sur $\mathbb{R}$ ***par*** $f(x) = 2e^{2x} - 5e^x + 2$

Nous allons utiliser une inconnue auxiliaire U pour factoriser f(x).
Posons $e^x = U$. Alors $f(x) = 2U^2 - 5U + 2$.
Le polynôme du second degré $2U^2 - 5U + 2$ a pour racine évidente 2.
On peut donc le factoriser sous la forme $(U-2)(2U-1)$.
Il en découle l'écriture suivante : $f(x) = (e^x - 2)(2e^x - 1)$.

Etudions séparément le signe de chacun des facteurs de f(x) :

$$e^x - 2 \geq 0 \iff e^x \geq 2 \iff x \geq \ln 2$$

$$2e^x - 1 \geq 0 \iff e^x \geq \frac{1}{2} \iff x \geq \ln\frac{1}{2}$$

Le tableau suivant nous donne le signe de f(x).

x	$-\infty$		$-\ln 2$		$\ln 2$		$+\infty$
$e^x - 2$		$-$		$-$	0	$+$	
$2e^x - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	