guessmaths

Exercice 1 :(4 points)

Les deux parties sont indépendantes.

Première partie :

Dans l'anneau $(M_3(\mathbb{R}),+,\times)$ on considère les deux matrices suivantes : $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(On pose : $A^0 = I$; $A^1 = A$; $A^2 = A \times A$ et $A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots\ldots \times A}_{n\,fois}$ pour tout n de)

0.5 1- Montrer que : $(\forall k \in \mathbb{N})$; $A^{2k} = I$

0.5 2-Montrer que A admet une matrice inverse A^{-1} que l'on déterminera.

Deuxième partie :

Soit a un nombre réel.

Pour tout x et y de l'intervalle $\mathrm{I} =]\alpha;+\infty[$ on pose : $x * y = (x-\alpha)(y-\alpha)+\alpha$

0.5 1- a)Montrer que $*$ est une loi de composition interne dans I

0.5 b) Montrer que la loi $*$ est commutative et associative.

0.5 c) Montrer que $(\mathrm{I},*)$ admet un élément neutre que l'on déterminera.

0.5 2- Montrer que $(\mathrm{I},*)$ est un groupe commutatif.

3- On considère l'application : $\varphi : \begin{array}{l} \mathrm{I} =]\alpha;+\infty[\mapsto \mathbb{R}^* \\ x \mapsto \dfrac{1}{x-\alpha} \end{array}$

0.5 a) Montrer que φ est un isomorphisme de $(\mathrm{I},*)$ vers $(\mathbb{R}_+^*,\times)$

0.5 b) Résoudre dans l'ensemble I l'équation : $x^{(3)}=\alpha^3+\alpha$ où $x^{(3)}=x*x*x$

Exercice 2 :(2.5points)

Soit N l'entier naturel dont l'écriture dans la base décimale est : $N=\underbrace{1\,11\ldots\ldots\ldots1}_{2010\,fois}$

0.25 1- Montre que le nombre N est divisible par 11

0.75 2- a) Vérifier que le nombre 2011 est premier et que $10^{2010}-1=9N$

0.5 b) Montrer que le nombre 2011 divise le nombre $9N$

0.5 c) En déduire que le nombre 2011 divise le nombre N.

0.5 3- Montrer que le nombre N est divisible par 22121

Exercice 3 :(3.5points)

Première partie :

Soit m un nombre complexe non nul.

On considère dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation d'inconnue z :

$(E_m) : z^2+\left[(1-i)m-4\right]z-i\,m^2-2(1-i)m+4=0$

0.5 1-Vérifier que le nombre $z_1=-m+2$ est solution de l'équation (E_m)

2- Soit z_2 la deuxième solution de l'équation (E_m)

0.5 a) Montrer que : $z_1z_2=1 \Leftrightarrow i\,m^2+2(1-i)m-3=0$

1 b) Déterminer les deux valeurs de m pour lesquelles on a : $z_1z_2=1$

Deuxième partie :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{u},\vec{v})$,

On considère l'application S qui au point M, d'affixe z, fait correspondre le point M' d'affixe z' tel que : $z'-1=-(z-1)$ et la rotation R de centre le point Ω d'affixe $(1+i)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$,et soit z'' l'affixe du point $M''=R(M)$.

0.25 1- a) Montrer que l'application S est la symétrie centrale de centre le point d'affixe 1.

0.25 b) Montrer que : $z'' = iz + 2$.

2- Soit A le point d'affixe 2 .

On suppose que le point M est distinct du point O origine du repère.

0.5 a)Calculer : $\dfrac{z''-2}{z'-2}$, en déduire la nature du triangle $AM'M''$.

0.5 b) Déterminer l'ensemble des points M pour lesquels les points A, Ω , M' et M'' sont cocycliques.

Exercice 4 :(6.5points)

Première partie :

Etude des solutions positives de l'équation (E) : $e^x = x^n$ avec n un entier naturel non nul.

On considère la fonction numérique f définie sur l'ensemble $D = [0,1[\cup]1,+\infty[$ par :

$\begin{cases} f(x) = \dfrac{x}{\ln x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$ et soit (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

0.25 1- Vérifier que pour tout x de l'ensemble $]0,1[\cup]1,+\infty[$ on a :

$$e^x = x^n \Leftrightarrow n = f(x)$$

0.5 2- Montrer que la fonction f est dérivable à droite en 0.

1.5 3- Calculer les limites : $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$; $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$

ensuite interpréter graphiquement les résultats obtenus.

0.75 4-Etudier les variations de la fonction f sur chacun des intervalles $[0,1[$ et $]1,+\infty[$ puis dresser son tableau de variations.

0.5 5-Montrer que la courbe (C) admet un point d'inflexion dont on déterminera les coordonnées.

0.5 6- Représenter graphiquement (C) .

0.5 7-Montrer que pour $n \geq 3$, l'équation (E) admet exactement deux solutions a_n et b_n tel que : $1 < a_n < e < b_n$

Deuxième partie :

Etude des deux suites $\left(a_n\right)_{n\geq3}$ et $\left(b_n\right)_{n\geq3}$

0.5 1-Montrer que : $(\forall n\geq3)\ \ b_n\geq n$, en déduire la limite de la suite $\left(b_n\right)_{n\geq3}$

0.5 2- a) Montrer que la suite $\left(a_n\right)_{n\geq3}$ est décroissante, en déduire qu'elle est convergente.

0.5 b) Montrer que : $(\forall n\geq3)\ \ \frac{1}{n}<\ln\left(a_n\right)<\frac{e}{n}$, en déduire la limite de la suite $\left(a_n\right)_{n\geq3}$

0.5 c)Montrer que : $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n^{\,n}=e$

Exercice 5 : (3.5points)

On considère la fonction numérique F définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par :

$F(x)=e^{-x^2}\int_0^x e^{-t^2}\,dt$

0.5 1- a) Montrer que : $(\forall x\geq0)\ \ 0\leq F(x)\leq xe^{-x^2}$

0.5 b) Montrer que : $(\forall x\geq1)\ \ e^{-x^2}\leq e^{-x}$ en déduire la limite de la fonction F en $+\infty$

0.5 2-Montrer que la fonction F est dérivable sur l'intervalle $[0;+\infty[$ et que :

$$F'(x)=e^{-2x^2}-2xF(x)$$

3- On considère la fonction numérique G définie sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

$$\text{par : }\begin{cases} G(x)=F(\tan x) & ;0\leq x<\frac{\pi}{2} \\ G\left(\frac{\pi}{2}\right)=0 \end{cases}$$

0.25 a) Montrer que la fonction G est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$

0.75 b) Montrer qu'il existe un réel c de l'intervalle $]0,+\infty[$ tel que : $F'(c)=0$ et que : $F(c)=\frac{e^{-2c^2}}{2c}$

(On pourra appliquer le théorème de ROLLE à la fonction G sur l'intervalle

$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$)

4- On considère la fonction numérique H définie sur $]0,+\infty[$ par :

$$H(x)=F'(x)\times\frac{e^{x^2}}{2x}$$

0.5 a) Montrer que la fonction H est strictement décroissante sur $]0,+\infty[$

0.5 b) En déduire que c est unique, puis donner le tableau de variation de F.