

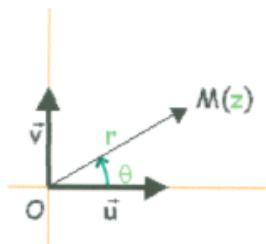
Le « plan complexe » est un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$ dans lequel sont représentés les nombres complexes.

Rappels

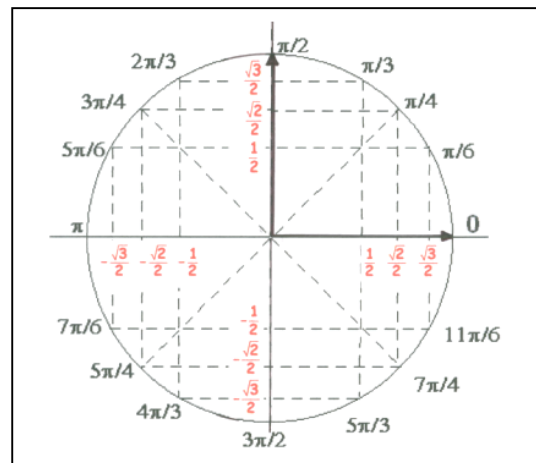
une écriture trigonométrique du complexe non nul z est $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ où $r = |z|$ et

$$\theta = \arg(z) [2\pi]$$

Si M est l'image de z dans le plan complexe alors, par définition,



$$\begin{cases} r = OM \\ \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) [2\pi] \end{cases}$$



♦ Nous supposons tout d'abord que le complexe non nul z est donné sous la forme algébrique $z = a + ib$ avec a et b réels.

Voici quelques exemples où la recherche d'une écriture trigonométrique de z peut être facilitée par :

- des considérations géométriques simples ;
- une factorisation évidente ;
- l'écriture préalable de $\bar{z}$ ou $-z$;
- l'utilisation de relations trigonométriques simples que l'on peut retrouver à l'aide du cercle trigonométrique.

Dans d'autres cas, le recours aux relations entre la forme algébrique et les formes trigonométriques est inévitable.

Quelle que soit la méthode utilisée, la connaissance parfaite du cercle trigonométrique et des valeurs remarquables du sinus et du cosinus est un prérequis indispensable.

♦ Nous envisagerons ensuite le cas où le complexe donné est écrit à l'aide des opérations élémentaires (produit, inverse, quotient ou puissance).

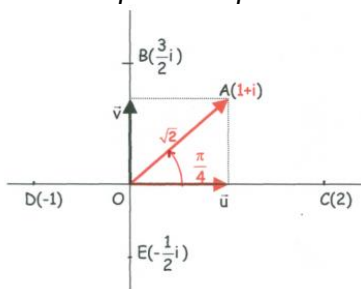
♦ Enfin nous étudierons un exemple où l'utilisation de formules trigonométriques classiques permet d'aboutir rapidement.

A) Des considérations géométriques simples.

Exemple 1

Soit les complexes $1+i$; $\frac{3}{2}i$; 2 ; -1 ; $-\frac{1}{2}i$

Il est facile de placer dans le plan complexe les images de ces nombres.



* Le complexe $1+i$ a pour image le point A.

$$|1+i| = OA = \sqrt{2} \quad (\text{diagonale d'un carré de côté 1}).$$

$$\arg(1+i) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad ((OA) \text{ est bissectrice de } (\vec{u}; \vec{v})).$$

$$\text{Donc } 1+i = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

* Le complexe $\frac{3}{2}i$ a pour image le point B.

$$\left| \frac{3}{2}i \right| = OB = \frac{3}{2} \quad \text{et } \arg\left(\frac{3}{2}i\right) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi].$$

$$\text{Donc } \frac{3}{2}i = \frac{3}{2} \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right).$$

* Le complexe 2 a pour image le point C.

$$|2| = OC = 2 \quad \text{et } \arg(2) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OC}) \equiv 0 [2\pi].$$

$$\text{Donc } 2 = 2(\cos 0 + i \sin 0).$$

* Le complexe -1 a pour image le point D.

$$|-1| = OD = 1 \quad \text{et } \arg(-1) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OD}) \equiv \pi [2\pi].$$

$$\text{Donc } -1 = \cos \pi + i \sin \pi.$$

* Le complexe $-\frac{1}{2}i$ a pour image le point E.

$$\left| -\frac{1}{2}i \right| = OE = \frac{1}{2} \quad \text{et } \arg\left(-\frac{1}{2}i\right) \equiv (\vec{u}; \overrightarrow{OE}) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}.$$

$$\text{Donc } -\frac{1}{2}i = \frac{1}{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right].$$

B) Des factorisations évidentes faisant apparaître des valeurs associées connues du cosinus et du sinus.

Exemple 2

$$\text{Soit le complexe } z = \frac{1 - i\sqrt{3}}{4}$$

En écrivant $z = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} + i \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \right]$ on fait apparaître les valeurs associées $\frac{1}{2}$ et $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, valeurs

remarquables du cosinus et du sinus. Il vient alors facilement : $z = \frac{1}{2} \left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \right]$

(Voir plus haut le cercle trigo).

Exemple 3

$$\text{Soit le complexe } z = -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$$

$$\text{Comme dans l'exemple précédent : } z = 2 \left[\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + i \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) \right] = 2 \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right)$$

(Voir plus haut le cercle trigo).

C) Écriture préalable du conjugué ou de l'opposé.

Exemple 4

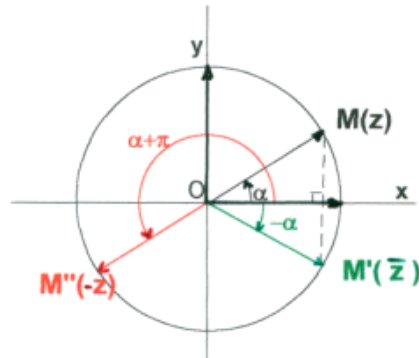
$$\text{Soit le complexe } z = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{\pi}{8} - i \sin \frac{\pi}{8} \right)$$

ATTENTION ! Cette écriture de z ressemble fort à une écriture trigonométrique. Mais elle n'en n'est pas une à cause du signe $(-)$ au milieu de la parenthèse.

Par contre $\bar{z} = \frac{1}{3} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right)$ est une écriture trigonométrique de $\bar{z}$.

Or nous savons que z et $\bar{z}$ ont même module et des arguments opposés.

Alors on déduit : $z = \frac{1}{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{8} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{8} \right) \right)$ (voir figure ci-dessous).



Exemple 5

Soit le complexe $z = -2 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)$

L'écriture $-z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right)$ est une forme trigonométrique de $-z$.

Or nous savons que z et $-z$ ont même module et des arguments qui diffèrent de π .

Alors on déduit : $z = 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{7} + \pi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{7} + \pi \right) \right) = 2 \left(\cos \frac{8\pi}{7} + i \sin \frac{8\pi}{7} \right)$ (voir ci-dessus).

D) Utilisation du cercle trigonométrique.

Dans ce paragraphe α désigne un réel quelconque donné.

Exemple 6

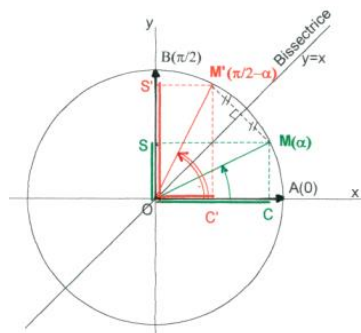
Soit le complexe $z = 3(\sin \alpha + i \cos \alpha)$

$|\sin \alpha + i \cos \alpha| = \sqrt{\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha} = \sqrt{1} = 1$ donc il existe un réel θ tel que $\cos \theta = \sin \alpha$ et $\sin \theta = \cos \alpha$.

Voici une méthode graphique qui permet de retrouver les relations entre les

images par les fonctions sin et cos des réel α , $-\alpha$, $\frac{\pi}{2} - \alpha$, $\frac{\pi}{2} + \alpha$, $\pi - \alpha$, $\pi + \alpha$...

$\overrightarrow{OA} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OB} = \vec{v}$.



Plaçons sur le cercle trigonométrique un point M représentant un réel α quelconque.

Traçons (en bleu sur la figure) $\overline{OC} = \cos \alpha$ et $\overline{OS} = \sin \alpha$.

Nous cherchons un réel θ tel que $\cos \theta = \sin \alpha$ donc $\cos \theta = \overline{OS}$ et tel que $\sin \theta = \cos \alpha$ donc $\sin \theta = \overline{OC}$.

Traçons alors $\overline{OC'} = \overline{OS}$ et $\overline{OS'} = \overline{OC}$. Les points C' et S' sont alors les projetés orthogonaux du point M' image du réel θ cherché.

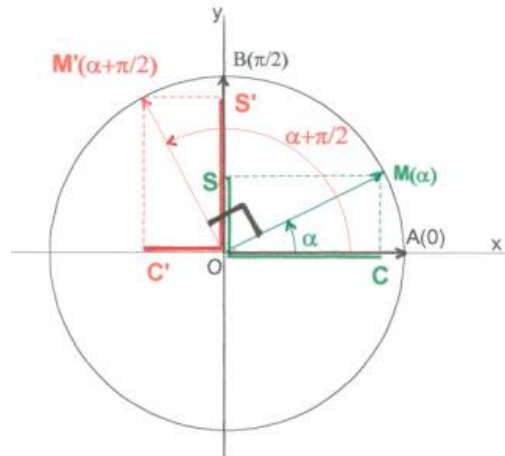
Il apparaît clairement, par construction, que les points M et M' sont symétriques par rapport à la première bissectrice des axes. Donc si α est une mesure de l'angle $(\overline{OA}, \overline{OM})$, alors $\frac{\pi}{2} - \alpha$ est une mesure de l'angle $(\overline{OA}, \overline{OM'})$.

On a donc $\sin \alpha = \cos(\frac{\pi}{2} - \alpha)$ et $\cos \alpha = \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha)$. D'où une forme trigonométrique du complexe donné : $z = 3[(\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \alpha))]$.

Exemple 7

Soit le complexe $z = 5(-\sin \alpha + i \cos \alpha)$

$|- \sin \alpha + i \cos \alpha| = \sqrt{(-\sin \alpha)^2 + \cos^2 \alpha} = \sqrt{1} = 1$ donc il existe un réel θ tel que $\cos \theta = -\sin \alpha$ et $\sin \theta = \cos \alpha$.



Comme dans l'exemple précédent plaçons les points $M(\alpha)$, C et S .

Nous cherchons ici un réel θ tel que $\cos \theta = -\sin \alpha$ donc $\cos \theta = -\overline{OS}$ et $\sin \theta = \cos \alpha$ donc.

Traçons alors $\overline{OC'} = -\overline{OS}$ et $\overline{OS'} = \overline{OC}$. Les points C' et S' sont alors les projetés orthogonaux du point M' image du réel θ cherché.

Il apparaît clairement, par construction, que les droites (OM) et (OM') sont perpendiculaires. Donc si α est une mesure de l'angle $(\overline{OA}, \overline{OM})$, alors $\alpha + \frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle $(\overline{OA}, \overline{OM'})$.

On a donc $-\sin \alpha = \cos(\alpha + \frac{\pi}{2})$ et $\cos \alpha = \sin(\alpha + \frac{\pi}{2})$. D'où une forme trigonométrique du complexe donné : $z = 5[(\cos(\alpha + \frac{\pi}{2}) + i \sin(\alpha + \frac{\pi}{2}))]$.

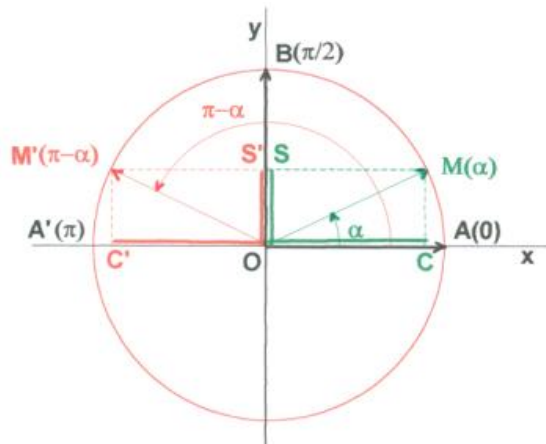
Exemple 8

Soit le complexe $z = -2(\cos \alpha - i \sin \alpha)$

On obtient une écriture équivalente de z en changeant le signe des deux facteurs :

$$z = 2(-\cos \alpha + i \sin \alpha).$$

A l'aide de la méthode précédente (mais on doit pouvoir se passer maintenant de tracer la figure ci-dessous), on trouve : $-\cos \alpha = \cos(\pi - \alpha)$ et $\sin \alpha = \sin(\pi - \alpha)$



D'où une écriture trigonométrique du complexe donné : $z = 2[(\cos(\pi - \alpha) + i \sin(\pi - \alpha))]$.

E) Utilisation des relations entre la forme algébrique et les formes trigonométriques.

Exemple 9

Soit le complexe $z = -\frac{2}{\sqrt{3}} - 2i$

Calculons le module r et un argument θ de z .

$$r = \sqrt{\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2 + (-2)^2} = \sqrt{\frac{4}{3} + 4} = \sqrt{\frac{16}{3}} = \frac{4}{\sqrt{3}} = \frac{4\sqrt{3}}{3}.$$

$$\cos \theta = \frac{-\frac{2}{\sqrt{3}}}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{-2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = -\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \sin \theta = \frac{-2}{\frac{4\sqrt{3}}{3}} = \frac{-6}{4\sqrt{3}} = \frac{-3}{2\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

D'où $\theta = \frac{4\pi}{3} \pmod{2\pi}$. Alors une forme trigonométrique de z est

$$z = \frac{4\sqrt{3}}{3} \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right).$$

Exemple 10

Soit le complexe $z = 4 - 3i$

Calculons le module r et un argument θ de z .

$$r = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$\cos \theta = \frac{4}{5} \quad \text{et} \quad \sin \theta = -\frac{3}{5}. \quad \text{D'où } \theta = -37^\circ \text{ (valeur approchée).}$$

Alors $z = 5 [\cos(-37^\circ) + i \sin(-37^\circ)]$.

F) Utilisation des opérations élémentaires.

Exemple 11

Soit le complexe $z = (-1 + i)(\sqrt{3} - i)$

- une impasse : on serait tenté de développer le produit $(-1 + i)(\sqrt{3} - i)$

pour obtenir $z = 1 - \sqrt{3} + i(1 + \sqrt{3})$. Les relations générales donnent alors :

$|z| = \sqrt{(1 - \sqrt{3})^2 + (1 + \sqrt{3})^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ puis, en notant θ un argument de z ,

$\cos \theta = \frac{1 - \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin \theta = \frac{1 + \sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$. Ces valeurs n'étant

pas considérées comme « remarquables », il est impossible de trouver une valeur exacte de θ .
- la bonne voie : considérons z comme le produit des complexes

$z_1 = -1 + i$ et $z_2 = \sqrt{3} - i$. On a d'après le cours :

$|z| = |z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$ et $\arg(z_1 z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2) \pmod{2\pi}$.

On détermine facilement (voir plus haut) les écritures trigo suivantes :

$z_1 = \sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$ et $z_2 = 2[\frac{\sqrt{3}}{2} + i(\frac{-1}{2})] = 2[\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6})]$.

Alors $|z| = 2\sqrt{2}$ et $\arg(z) = \frac{3\pi}{4} + (-\frac{\pi}{6}) = \frac{7\pi}{12} \pmod{2\pi}$.

Donc $z = 2\sqrt{2}(\cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12})$.

- remarque : en identifiant l'écriture algébrique de z et l'écriture trigo

de z donnée ci-dessus, on obtient les valeurs exactes de $\cos \frac{7\pi}{12}$ et $\sin \frac{7\pi}{12}$:

$\cos \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$ et $\sin \frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$.

Exemple 12

Soit le complexe $z = \left(\frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{6i} \right)^4$

Appliquons les propriétés du module et des arguments d'un complexe non nul :

$|z| = \left| \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{6i} \right|^4 = \left(\frac{|\sqrt{2} + i\sqrt{2}|}{|6i|} \right)^4 = \frac{|\sqrt{2} + i\sqrt{2}|^4}{|6i|^4}$ et

$\arg(z) = 4 \arg \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{6i} = 4[\arg(\sqrt{2} + i\sqrt{2}) - \arg(6i)] \pmod{2\pi}$.

Or $\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}) = 2(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4})$ et $6i = 6(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2})$.

Donc $|z| = \frac{2^4}{6^4} = \left(\frac{1}{3} \right)^4 = \frac{1}{81}$ et $\arg(z) = 4(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}) = \pi - 2\pi = -\pi \pmod{2\pi}$.

Alors $z = \frac{1}{81}[\cos(-\pi) + i \sin(-\pi)] = -\frac{1}{81}$.

G) Utilisation de formules trigonométriques.

Exemple 13

Soit le complexe $z = 1 + \cos \alpha + i \sin \alpha$, $\alpha \in [0; 2\pi[- \{\pi\}$

$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$ et $\sin \alpha = 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}$. D'où :

$z = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} + i 2 \sin \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2} = 2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})$.

- Si $\alpha \in [0; \pi[$ alors $\frac{\alpha}{2} \in [0; \frac{\pi}{2}[$ et $\cos \frac{\alpha}{2} > 0$.

Une forme trigonométrique de z est bien : $z = 2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})$.

- Si $\alpha \in]\pi; 2\pi[$ alors $\frac{\alpha}{2} \in]\frac{\pi}{2}; \pi[$ et $\cos \frac{\alpha}{2} < 0$. Dans ce cas

l'écriture $-z = -2 \cos \frac{\alpha}{2} (\cos \frac{\alpha}{2} + i \sin \frac{\alpha}{2})$ est une forme trigonométrique de $-z$.

Or $|z| = |-z|$ et $\arg(z) = \arg(-z) + \pi \pmod{2\pi}$. D'où une forme

trigonométrique de z est : $z = -2 \cos \frac{\alpha}{2} [\cos(\frac{\alpha}{2} + \pi) + i \sin(\frac{\alpha}{2} + \pi)]$.