guessmaths

Exercices corrigés sur les suites   Terminale S

Exercice 1

1. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_0 = 2$ *et pour tout entier n,* $u_{n+1} = 5u_n + 4$.

Montrer que, pour tout entier n, $u_n > 0$.

2. *Démontrer que pour tout n entier,* $4^n + 5$ *est un multiple de* 3.

3. *Soit* (u_n) *la suite définie par* $u_0 = -3$ *et pour tout entier n,* $u_{n+1} = 5 - 4u_n$.

Montrer que pour tout entier n, $u_n = (-4)^{n+1} + 1$.

4. *On pose* $S_n = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2$ *avec* $n \geq 1$

a. *Calculer* S_1, S_2, S_3 *et* S_4. *Exprimer* S_{n+1} *en fonction de* S_n.

b. *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel* $n \geq 1$: $S_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. *La suite* (u_n) *est définie par* $u_0 \in]0;1[$ *et* $u_{n+1} = u_n(2 - u_n)$.

a. *Etudier les variations de la fonction* $f(x) = x(2 - x)$.

b. *Démontrer par récurrence que pour tout entier n,* $0 < u_n < 1$

Correction

Exercice 2

1. *l'inégalité de* Bernouilli *; soit un réel tel que :* $a > 0$ *; Montrer que pour tout* $n \in \mathbb{N}$
$(1 + a)^n \geq 1 + a^n$

2. *Soit la suite* (u_n) *définie par :* $u_0 = 1$ *et* $u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}$

Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ; $0 < u_n < 2$,

3. *Montrer par un raisonnement par récurrence que l'on a pour tout n entier* $3^n > n$.

www.guessmaths.co E-mail :abdelaliguessouma@gmail.com WhatsApp : 0717467136

4. *Démontrer par récurrence que pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$*, la somme des entiers de 1 à n est égale à* $\frac{n(n+1)}{2}$ *c'est-à-dire :* $1+2+....+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

5. *Démontrer par récurrence la relation suivante pour tout entier n non nul :*

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\frac{n}{n+1}$$

6. *On considère la suite définie pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ *par* $u_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$

Démontrer par récurrence que l'on $u_n=n^2$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$

Correction

Exercice 3

Le but de cet exercice est d'étudier la suite (u_n) *définie par :* $u_0=3$ *et*

$$u_{n+1}=\frac{1}{2}\left(u_n+\frac{7}{u_n}\right)$$

1. *On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle* $]0;+\infty[$ *par :* $f(x)=\frac{1}{2}\left(x+\frac{7}{x}\right)$

Démontrer que f admet un minimum.

En déduire que pour tout entier naturel n ; $u_n \geq \sqrt{7}$

2. a. *Soit n un entier naturel quelconque*

Etudier le signe de $u_{n+1}-u_n$

b. *Pourquoi peut-on déduire que la suite* (u_n) *est convergente.*

c. *Déterminer la limite de la suite* (u_n) .

3. *Démontrer que pour tout entier naturel* n *:* $u_{n+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\frac{\left(u_n-\sqrt{7}\right)^2}{u_n}$

Correction

Exercice 4

On considère la suite (u_n) *définie sur* $\mathbb{N}$ *par :* $u_0 = 2$ *et* $u_{n+1} = \dfrac{u_n + 2}{2u_n + 1}$

On admet que pour tout entier naturel n ; $u_n > 0$

1. a. *Calculer* u_1 *;* u_2 *;* u_3 *et* u_4*. On pourra donner une valeur approchée à* 10^{-3} *prés.*

b. *Vérifier que si n est l'un des entiers 1 ;2 ;3 ou 4 alors* $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$.

c. *Montrer que pour tout entier naturel n ;* $u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$

d. *Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n ;* $u_n - 1$ *a le même signe que* $(-1)^n$.

2. *Pour tout entier naturel n ; on pose :* $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$

a. *Monter que pour tout entier naturel n ;* $v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$

b. *Déduire que la suite* (v_n) *est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.*

En déduire l'expression de v_n *en fonction de n.*

c. *Monter que pour tout entier naturel n ;* $u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$

Exprimer u_n *en fonction de n ; puis déterminer la limite de* (u_n).

Correction