Exercice 1: (3 Pts)

On considère la suite numérique $(u_n)_{n\in IN}$ définie par : $\begin{cases} u_0 = \dfrac{3}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n - 2}{u_n - 3} & ;\forall n \in IN \end{cases}$

1) Montrer par récurrence que : $\forall n \in IN; \dfrac{3}{2} \leq u_n \leq 2$.

2) a) Vérifie que pour tout entier $n \in IN$; $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n - 1)(2 - u_n)}{u_n + 3}$

b) Montrer que $(u_n)_{n\in IN}$ est une suite croissante.

3) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in IN}$ est convergente.

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n : $0 \leq 2 - u_{n+1} \leq \dfrac{1}{9}(2 - u_n)$

b) Montrer que pour tout entier naturel n: $0 \leq 2 - u_n \leq \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{8}{9}\right)^n$

c) Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in IN}$

Exercice 2: (4 Pts)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ l'équation suivante: $2z^2 + 6z + 17 = 0$.

2) On considère dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{u};\vec{v})$ les points A ; B ; C et D d'affixes respectives: $a = -4$; $b = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{5}{2}i$; $c = -\dfrac{3}{2} - \dfrac{5}{2}i$

a) Montrer que $\dfrac{b-a}{c-a} = -i$

b) En déduire la nature du triangle ABC.

c) Calculer l'aire du triangle ABC.

3) Soit $M'(z')$ l'image du point $M(z)$ par la transformation T tel que : $z' = -iz + 1 - 4i$

a) Quelle est la nature de la transformation T. (déterminer ses éléments caractéristiques)

b) Déterminer d l'affixe du point D image du point A par la transformation T.

5) Déterminer l'ensemble des points M d'affixes z tels que: $|2z + 3 + 5i| = |-8 + 2z|$

Exercice 3: (3 Pts)

Soit f une fonction définie par : $f(x) = 2\ln(x+1) - \dfrac{x^2 + 2}{x + 1}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Déterminer D_f le domine de définition de f.

2) Calculer les limites: $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to-1^+} f(x)$

3) Etudier les variations de la fonction f sur D_f puis dresser le tableau de variations de f.

4) Etudier la branche infinie de la courbe (C_f) au voisinage de $+\infty$

5) Tracer la courbe (C_f) dans le repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

Exercice 4: (10 Pts)

Partie I

Soit g la fonction numérique définie sur IR par : $g(x)=1-xe^{1-x}$

Le tableau ci-contre est le tableau de variation de la fonction g

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		$\searrow$	$g(1)$	$\nearrow$	

1) Vérifie que $g(1)=0$.

2) Déterminer le signe de $g(x)$ sur chacun des intervalles : $]-\infty;1]$ et $[1;+\infty[$.

Partie II

On considère la fonction numérique f définie sur IR par : $f(x)=x-3+(x+1)e^{1-x}$

Et (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

2) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-3)=0$ et interpréter le résultat géométriquement.

3) Montrer que $\lim_{x\to+\infty} f(x)-(x-3)=-\infty$ et interpréter le résultat géométriquement.

4) Étudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) d'équation $y=x-3$

5) Montrer que pour tout $x\in IR$; $f'(x)=g(x)$

6) Calculer $f'(1)$ puis interpréter géométriquement le résultat obtenu.

7) Montrer que f est strictement croissante sur IR

8) Dresser le tableau de variations de la fonction f pour tout $x\in IR$.

9) Étudier la position relative de la courbe (C_f) par rapport à la droite (D) .

10) Montrer que la courbe (C_f) admet un point d'inflexion unique de coordonnées $(1;0)$

11) Soit h la restriction de la fonction f sur l'intervalle $I=]-\infty;1]$

a) Montrer que la fonction h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur l'intervalle J à déterminer.

b) Vérifier que $h(0)=e-3$ puis en déduire que $\left(h^{-1}\right)'(e-3)=0$

12) Construire la droite (D) et la courbe (C_f) dans le même repère $\left(O;\vec{i};\vec{j}\right)$.

Partie III

1) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $\int_0^1 (x+1)e^{1-x}dx = 2e-3$

2) Calculer en cm^2 paire du domine plan limité par (C_f) et la droite (D) et les droites des d'équation $x=0$ et $x=1$.