Correction exercices sur les dérivées

Exercice 1(Correction)

- *Calculons* $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{\sqrt[3]{2-x}-\sqrt[3]{2-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{\sqrt[3]{2-x}}{2-x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\left(-\frac{\sqrt[3]{2-x}}{\sqrt[3]{(2-x)^3}}\right)=\lim_{x\to 2^-}\left(-\sqrt[3]{\frac{1}{(2-x)^2}}\right)=-\infty$$

Interprétation géométrique

La courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à gauche du point d'abscisse x=2 .

- *Calculons* $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{f(x)-f(2)}{x-2}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{x\sqrt{x-2}-2\sqrt{2-2}}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x\sqrt{x-2}}{x-2}\right)$$

$$=\lim_{x\to 2^+}\left(x\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{(x-2)^2}}\right)=\lim_{x\to 2^+}\left(\frac{x}{\sqrt{x-2}}\right)=+\infty$$

Interprétation géométrique

La courbe de f admet une demi-tangente verticale dirigée vers le haut à droite du point d'abscisse x=2 .

Conclusion : *f n'est pas dérivable en* $x_1=2$.

- *La fonction f étant une fonction Racine* $n^{iéme}$ $(n=3)$ *alors elle est dérivable sur son domaine de définition intervalle ouvert en particulier en* $x_0=0$.

Exercice 4(Correction)

$(\forall x\in IR)\ f(x)=x\left(\sqrt{x}-2\right)^2$

1- *Calculons* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$

- $$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\cancel{x}\left(\sqrt{x}-2\right)^2}{\cancel{x}}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\sqrt{x}-2\right)^2=4$$

Donc la fonction f est dérivable à droit de 0 et sa courbe admet Une de tangente d'équation $y=4x$ *à droite du point d'abscisse 0 .*

Equation de la demi tangente à droite de x_0 *est* $y=f_d'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

2-

$$(\forall x \in IR) \qquad f'(x) = \left(x\left(\sqrt{x}-2\right)^2\right)'$$

$$= \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + x\left(\left(\sqrt{x}-2\right)^2\right)'$$

$$= \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + x\left(2\left(\sqrt{x}-2\right)'\left(\sqrt{x}-2\right)\right)$$

$$= \left(\sqrt{x}-2\right)^2 + x\cancel{2}\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}-2\right)$$

$$= \left(\left(\sqrt{x}-2\right)+\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x}-2\right)$$

$$= 2\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$$

<u>*Tableau de signe de*</u> $f'(x)$ <u>*sur*</u> IR^+

x	*0* $+\infty$		*1*		*4*		
$\sqrt{x}-1$		*0*		$+$	$+$		
$\sqrt{x}-2$				*0*	$+$		
$f'(x)$		$+$	*0*	-	*0*	$+$	

<u>*Tableau de variation de f sur*</u> IR^+

x	*0*		*1*		*4*		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	*0*	-	*0*	$+$	
$f(x)$	*0*	$\nearrow$	*1*	$\searrow$	*0*	$\nearrow$	$+\infty$

3- $g(x) = x\left(\sqrt{x}-2\right)^2 \quad \left(\forall x \in [4;+\infty[\right)$

a) D'après le tableau de variation de <u>*f*</u> *la restriction g est strictement croissante sur* $[4;+\infty[$ *; donc elle admet une fonction*

Réciproque définie sur $g\left([4;+\infty[\right) = [0;+\infty[$.

b) On a : $g(9) = 9 \Leftrightarrow g^{-1}(9) = 9$

- $g'\left(g^{-1}(9)\right) = g'(9) = 2\left(\sqrt{9}-1\right)\left(\sqrt{9}-2\right) = 4 \neq 0$

Donc g^{-1} *est dérivable en 9 et on a :*

$$\left(g^{-1}\right)'(9) = \frac{1}{g'\left(g^{-1}(9)\right)} = \frac{1}{4} \quad .$$