Série n° 2 d'exercices sur ***1ére Bac S.EXP***

« Produit scalaire et ses applications à la droite dans le plan »

Exercice 1

Soit ABC un triangle rectangle et isocèle de sommet A et soit I le milieu de $[BC]$ *, M un point de la droite (BC) ; P et Q sont les projetés orthogonaux respectifs du point M sur* (AB) *et* (AC).
En choisissant un repère orthonormé convenable, montrer analytiquement que :
1) Les droites (IP) *et* (IQ) *sont perpendiculaires*
2) Le point I appartient à la médiatrice du segment $[PQ]$.

Méthode 1

Pour étudier, analytiquement quelques propriétés géométriques, en utilisant le produit scalaire, on peut:
1) Choisir un repère orthonormé, facilitant la détermination des coordonnées des points liés à la figure.
2) Déterminer les coordonnées des points et quelques vecteurs associés à la figure et à la propriété visée.
3) Appliquer l'expression analytique du produit scalaire pour démontrer l'orthogonalité de deux vecteurs ou pour le calcul de quelques distances ou pour déterminer l'équation d'une droite perpendiculaire à une autre.
*C.- **choix d'un repère***

On a : $(AB)\perp(AC)$ *et* $AB=AC$ *, donc on peut choisir le repère* $\left(A;\vec{i};\vec{j}\right)$ *tel que:* $\overrightarrow{AB}=a\vec{i}$ *et* $\overrightarrow{AC}=a\vec{j}$ *où* $a>0$ *;* $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=1$ *et par suite le repère* $\left(A;\vec{i};\vec{j}\right)$ *est orthonormé.*

On a : $A(0;0)$; $B(a;0)$; $C(0;a)$ *et* $C\left(\frac{a}{2};\frac{a}{2}\right)$ *milieu de* $[BC]$*).*

• *En posant* $M(m;n)$ *, on obtient* $P(m;0)$ *et* $Q(0;n)$ *(P et Q sont les projetés orthogonaux de M sur les axes du repère) et par suite :* $\overrightarrow{IP}\left(m-\frac{a}{2};-\frac{a}{2}\right)$ *et* $\overrightarrow{IQ}\left(-\frac{a}{2};n-\frac{a}{2}\right)$

1) Montrons, analytiquement, que les droites (IP) *et* (IQ) *sont perpendiculaires*

Calculons le produit scalaire $\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ}$.

On a:
$$\overrightarrow{IP}.\overrightarrow{IQ}=\left(m-\frac{a}{2}\right)\left(-\frac{a}{2}\right)+\left(-\frac{a}{2}\right)\left(n-\frac{a}{2}\right)$$
$$=-\frac{a}{2}\left(m-\frac{a}{2}+n-\frac{a}{2}\right)$$
$$=-\frac{a}{2}(m+n-a)$$

• *Montrons que :* $x+y-a=0$ *est une équation de la droite* (BC)

On a le vecteur $\vec{n}(1;1)$ *est un vecteur normal à la droite* (BC) *car* $\overrightarrow{BC}.\vec{n}=\begin{pmatrix}-a\\a\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0$

Soit $H(x;y)$ *un point de la droite* (BC) *; donc* $\overrightarrow{BH}.\vec{n}=0$.

Donc : $\begin{pmatrix}x-a\\y\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=0\Rightarrow x+y-a=0$.

D'où : $x+y-a=0$ *est une équation de la droite* (BC)

Puisque $M \in (BC)$ alors $m+n-a=0$ d'où $\overrightarrow{IP}.\ \overrightarrow{IQ}$.

Ce qui prouve que les droites (IP) et (IQ) sont perpendiculaires.

2) Montrons que I est un point de la médiatrice du segment $[PQ]$.

Calculons IP et IQ

On a : $\begin{cases} IP^2 = \left(m-\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 \\ IQ^2 = \left(-\dfrac{a}{2}\right)^2 + \left(n-\dfrac{a}{2}\right)^2 \end{cases}$

Donc : $\begin{cases} IP^2 = m^2 - am + \dfrac{a^2}{2} \\ IQ^2 = n^2 - an + \dfrac{a^2}{2} \end{cases}$

et on sait que $m+n-a=0$ $m=a-n$ et par suite : $IP^2 = (a-n)^2 - a(a-n) + \dfrac{a^2}{2} = n^2 - an + \dfrac{a^2}{2}$

il en résulte que $IP^2 = IQ^2$ d'où $IP = IQ$.

Ce qui prouve que I est un point de la médiatrice du segment $[PQ]$.

<u>Exercice résolu 2</u>

Déterminer une équation d'une droite passant par un point et perpendiculaire à une droite donnée.

Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$ on considère les points $A(5;0)$ et $B(2;6)$.

Déterminer une équation de la droite (D) passant par A et perpendiculaire à la droite (OB).

<u>Remarque</u>

La droite (D) passant par un point A et perpendiculaire à une droite (Δ) est la droite passant par A et qui admet pour vecteur normal un vecteur directeur de (Δ).

Donc pour déterminer une équation : $\alpha x + \beta y + \delta = 0$ de la droite (D) passant par A et perpendiculaire à la droite (Δ) définie par deux points B et C ou par une équation du type : $ax+by+c=0$, on peut suivre l'une des deux méthodes suivantes :

<u>Méthode 1</u>

Déterminer un vecteur normal n à (D): $\vec{n} = \overrightarrow{BC}$ dans le cas où $(\Delta)=(BC)$ ou $\vec{n}(-b,\ a)$ dans le cas où $ax+by+c=0$ est une équation de (Δ).

• Considérer un point $M(x;y)$ du plan.

• Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AM}.\ \vec{n}$.

• Déterminer une équation de (D) à partir de l'équivalence : $M \in (D) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}.\ \vec{n} = 0$.

<u>Méthode 2</u>

. Déterminer le couple de coordonnées $(\alpha;\beta)$ d'un vecteur $\vec{n}$ normal à (D): $\vec{n} = \overrightarrow{BC}$ dans le cas où (BC) ou $\vec{n}(-b,\ a)$ dans le cas où $(\Delta): ax+by+c=0$.

Déterminer δ en utilisant $A \in (D)$.

Correction

• *Déterminons une équation de la droite* (D) *passant par A et perpendiculaire à* (OB) .

.On utilise la méthode 1:

On a: $\overrightarrow{OB}$ *est un vecteur normal à* (D)

• *Soit* $M(x;y)$ *un point du plan.*

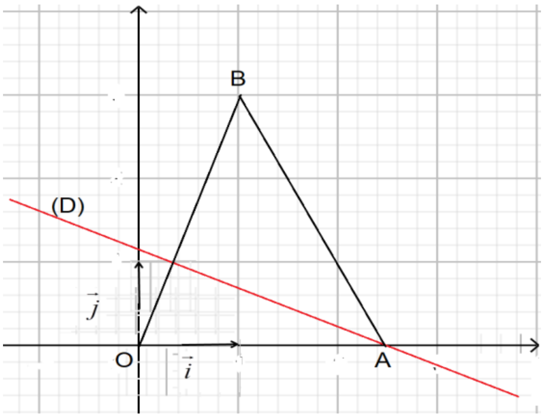
Donc: $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OB}=(x-5)\times 2+(y-0)\times 6$

d'où $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{OB}=2x+6y-10$ *et par suite:* $M\in(D) \Leftrightarrow x+3y-5=0$

ce qui veut dire que: $x+3y-5=0$ *est une équation de* (D)

Utiliser la méthode 2, pour déterminer de nouveau, une équation de $x+3y-5=0$

Schéma



Exercice 3

Déterminer une équation de la médiatrice d'un segment
En utilisant les mêmes données de l'exercice n°2.
Déterminer une équation de (L) *, médiatrice du segment* $[AB]$.

Méthode 3

on peut procédé de deux façons :

• *déterminer une équation de la droite passant par le milieu du segment* $[AB]$ *et perpendiculaire à la droite* (AB) *en utilisant l'une des méthodes citées dans l'exercice résolu n°2.*

• *traduire, analytiquement, la propriété caractéristique de la médiatrice* (L) *du segment* $[AB]$*, c'est-à-dire :* $M\in(L)\Leftrightarrow AM=BM$.

Correction

Déterminons une équation de (L) *médiatrice du segment* $[AB]$.

Soit $M(x;y)$ *un point du plan.*

On a: $M\in(L)\Leftrightarrow AM=BM$ *et on sait que :* $AM=BM\Leftrightarrow AM^2=BM^2$

donc: $M\in(L)\Leftrightarrow(x-5)^2+(y-0)^2=(x-2)^2+(y-6)^2$

puisque $(x-5)^2+(y-0)^2=x^2+y^2+25-10x$ *et* $(x-2)^2+(y-6)^2$ = *x² + y2 - 4x- 12y+*

alors : $M\in(L)\Leftrightarrow 6x-12y+15=0$ *.D'où* $(L):6x-12y+15=0$.

Exercice 4

- Déterminer les coordonnées du projeté orthogonal d'un point sur une droite
- Déterminer la distance d'un point à une droite
En utilisant les mêmes données de l'exercice n°2:
1) Déterminer les coordonnés de H projeté orthogonal du point A sur la droite (OB).
2) En déduire la distance du point A à la droite (OB).

Méthode 4

Pour déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point A sur une droite (D), *on peut suivre les étapes :*
• Déterminer une équation de (D) *;*
• Déterminer une équation ou une représentation paramétrique de la droite (Δ) *passant par A et perpendiculaire à la droite* (D).
•Déterminer les coordonnées du point H, en tant que point d'intersection des droites (D) *et* (Δ)
(Solution d'un système de deux équations...).

Solution

1) Déterminons les coordonnés de H.
• Equation de la droite (OB): $y=3x$
• Equation de la droite (D) *perpendiculaire à* (OB) *et passant par A.*
Selon l'exercice n° 2 on a : $(D): x+3y-5=0$.
La résolution du système $\begin{cases} x+3y-5=0 \\ y=3x \end{cases}$ *conduit à* $(x;y)=\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$
et par suite : $\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$ *est le couple de coordonnées de H.*
2) Déduction de la distance du point A à la droite (OB).
On sait que H est le projeté orthogonal du point A sur (OB), *donc* $d(A;(OB))=AH$ *et puisque*
$AH=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-5\right)^2+\left(\frac{3}{2}-0\right)^2}$ *alors* $d(A;(OB))=\frac{3}{2}\sqrt{10}$