

2ème Bac PC

Exercice 1

Calculer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{x^2} - x - x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[3]{x-1} - \sqrt[3]{3x-5}}{3x^2 - 5x - 2}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt[4]{x+1} - \sqrt[3]{x+1}}{\sqrt[3]{x+1} - \sqrt{x+1}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x+7} - 2}{x-1}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt[3]{2x+2} + \sqrt{3x+7} - 6}{x-3}$$

Exercice 02: (Ordres et calcul des limites)

1- Soit f une fonction telle que : pour tout $x > 1$; $\frac{2}{x^2} \leq f(x) \leq \frac{2}{x}$, déterminer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$

2- Soit g une fonction telle que : pour tout $x < -1$; $\frac{3}{x} \leq g(x) - \frac{2}{3} \leq -\frac{2}{x^2}$, déterminer $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

Exercice 03:

On veut trouver la limite en $+\infty$ de $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

1- Montrer que pour tout $x > 0$; $x^2 \leq 1+x^2 \leq (1+x)^2$

2- En déduire pour $x > 0$, un encadrement de $f(x)$.

3- En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

Exercice 04: (théorème d'encadrement ou théorème des gendarmes)

Calculer les limites suivantes :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x + 3}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2x + \cos x}{x-1} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{\cos x}{x^2} \right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{2 + \cos x}{x - \sin(2x)} \right)$$

Exercice 05:

Montrer que :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} + 2x\right) \tan\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right)}{x^3} = 24$$

Exercice 05:

Déterminer le domaine de définition de la fonction f dans chacun des cas suivants :

$$\bullet f(x) = \frac{\sqrt{1+|x|}}{\sqrt{2x^2+x-1}}$$

$$\bullet f(x) = \frac{\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}}$$

$$\bullet f(x) = \frac{x+1}{2x^2-x-1}$$

$$\bullet f(x) = \sqrt{2x-3}$$

$$\bullet f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sin^2 x + \sin x - 2}$$

$$\bullet f(x) = \frac{x-1}{|x| - \frac{1}{2}}$$

$$\bullet f(x) = \frac{\tan x}{\cos x - 1}$$

$$\bullet f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{-2x^2+x+1}}$$

Exercice 06:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x|-1}{x^2-1} - \frac{x^2-|x|}{x^2-2|x|+1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

2) Simplifier l'écriture de $f(x)$ pour tout $x \in D_f$.

Exercice 07:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{2}}{x-1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

2) Montrer que : $(\forall x \in D_f) ; 0 \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$.

3) Montrer que $\frac{\sqrt{2}}{2}$ est une valeur maximale pour la fonction f sur D_f .

Exercice 08:

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{|x|}{x^2+|x|+1}$

1) Déterminer D_f le domaine de définition de la fonction f .

2) Étudier la parité de f .

3) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}^-$.

4) Dédire les variations de f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 09:

On considère les fonctions f et g définies par :

$$f(x) = -x^2 + 2x + 1 \text{ et } g(x) = \sqrt{x-1}$$

(C_f) et (C_g) leurs courbes respectives dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.

- 1) a) Déterminer D_f et D_g les domaines de définition respectifs des fonctions f et g .
 b) calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$; puis étudier les branches infinies de (C_f) et (C_g) .
- 2) a) Calculer $f'(x)$ et $g'(x)$; puis déduire les variations de f et g .
 b) Montrer que $y = 2x + 1$ est l'équation de (T_f) la tangente à (C_f) au point d'abscisse $x_0 = 0$.
 c) Montrer qu'il existe une droite parallèle à (T_f) et tangente à (C_g) ; puis déterminer son équation cartésienne.
- 3) a) vérifier que (C_f) et (C_g) se coupent en $A(2;1)$.
 b) Construire (C_f) et (C_g) dans le repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
- 4) Résoudre graphiquement l'inéquation : $x^2 - 2x - 1 + \sqrt{x-1} < 0$
- 5) Déterminer graphiquement l'image des intervalles $[1;2]$ et $[0;1]$ par la fonction f .
- 6) On considère la fonction h définie par : $h(x) = \sqrt{-x^2 + 2x}$
 - a) Déterminer D_h le domaine de définition de la fonction h
 - b) Vérifier que pour tout $x \in D_h$; $h(x) = (g \circ f)(x)$.
 - c) Etudier les variations de h sur chacun des intervalles $[1;2]$ et $[0;1]$.

Exercice 13:

A. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{-2\}$ par : $f(x) = \frac{1-x^2}{2+x}$

1. Pour tout x réel différent de -2 , trouver trois réels a, b, c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{2}{2+x}$
2. Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$.
3. Montrer que si (C) admet un centre de symétrie, déterminer son abscisse.

B. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\varphi(t) = \frac{1 - \sin^2 t}{2 + \sin t}$

1. Pour tout réel t , montrer que : $\varphi(\pi - t) = \varphi(t)$.

Expliquer comment l'étude des variations de φ sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ permet de construire la courbe représentative de φ .

2. a. On pose $a = \sqrt{3} - 2$. Justifier l'existence et l'unicité de $t_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ tel que : $\sin t_0 = a$:

b. En utilisant φ comme composée de fonctions, étudier ses variations sur $\left[-\frac{\pi}{2}; t_0\right]$ puis

sur $\left[t_0; \frac{\pi}{2}\right]$

c. Soit φ' la dérivée de φ .

Pour tout nombre réel t , prouver l'égalité : $\varphi'(t) = f'(\sin t) \times \cos t$.

Retrouver alors les valeurs pour lesquelles φ' s'annule sur $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

d. Tracer la courbe représentative de φ sur $\left[-\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

Exercice 14:

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x + \cos^2(x)$
et C sa courbe représentative.

1. a) Démontrer que pour tout réel x , $x \leq f(x) \leq x + 1$.

b) En déduire les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

c) Interpréter graphiquement l'encadrement précédent.

2. On note (d_1) et (d_2) les droites d'équation $y = x$ et $y = x + 1$.

Déterminer les points d'intersection de la courbe C avec la droite (d_1) ; puis avec la droite (d_2)

3. a) Montrer que pour tout réel x , $f'(x) = 1 - \sin(2x)$.

b) En déduire le sens de variations de la fonction f .

c) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f'(x) = 0$.

4. a) Dresser le tableau de variations de f sur $[0; \pi]$.

b) Tracer (d_1) ; (d_2) et C la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$.

5. a) Démontrer que pour tout réel x , $f(x + \pi) = f(x) + \pi$.

b) Comment déduit-on la courbe C de la représentation graphique de f sur $[0; \pi]$.