Etude fonction ln et exp **2éme Bac PC-SVT**

Problème

Partie 1:

1- Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x)=x+1+\ln(x)$

a) Etudier les variations de la fonction g

b) Montrer que l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α sur $]0;+\infty[$ et que : $\frac{1}{e^2}<\alpha<\frac{1}{e}$

c) En déduire le signe de $g(x)$.

2- Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $u(x)=\ln(x)-x+1$

a) Montrer que u est croissante sur $]0;1]$ et décroissante sur $[1;+\infty[$

b) En déduire que $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ \ln(x)\leq x-1$

3- Soit u la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par: $v(x)=2\ln(x)-x^2+1$

a)Vérifier que $(\forall x\in]0;+\infty[);v'(x)=2u(x)$ et en déduire que v est strictement décroissante sur $]0;+\infty[$

b) Calculer $v(1)$ et en déduire que $(\forall x\in]0;1])\ ;\ v(x)\geq 0$ et $(\forall x\in[1;+\infty[)\ ;v(x)\leq 0$

Partie 2:

Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x\ln(x)}{x+1} & ;\ x>0 \\ f(0)=0 \end{cases}$

On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$

1- a) Montrer que f est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu

c) Vérifier que (C_f) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses

2- a) Montrer que f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f'(x)=\dfrac{g(x)}{(x+1)^2}$

b) En déduire que f est strictement croissante sur $[\alpha;+\infty[$ et strictement décroissante sur $[0;\alpha]$.

3- a) Montrer que : $y=\frac{1}{2}(x-1)$ est une équation la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b) Vérifier que : $(\forall x\in]0;+\infty[)\ ;\ f(x)-\frac{1}{2}(x-1)=\dfrac{v(x)}{2(x+1)}$

En déduire la position relative de (C_f) et (T).

4- a) Vérifier que : $f(\alpha)=-\alpha$.

b) Construire (C_f) et (T) dans le même repère $(O;\vec{i};\vec{j})$.

5- Soit h la restriction de f sur l'intervalle $I=[1;+\infty[$

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J à déterminer.

b) Montrer que h^{-1} est dérivable en $\dfrac{e}{e+1}$