

Exercice 1

On considère la suite (U_n) définie par:
$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{3U_n + 2}{U_n + 2} \end{cases} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

- 1- a) Montrer par récurrence que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; 0 < U_n < 2$.
 b) Résoudre l'inéquation $-x^2 + x + 2 \geq 0$; déduire que la suite (U_n) est croissante et qu'elle est convergente.
- 2- a) Montrer que: $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |U_{n+1} - 2| \leq \frac{1}{2}|U_n - 2|$
 b) déduire que : $(\forall n \in \mathbb{N}) ; |U_n - 2| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$.
 c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

Exercice 2

- 1- Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ l'équation: $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$
 - 2- Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{e}_1; \vec{e}_2)$ on considère les points A ; B et C d'affixes respectives $a = 2 + 4i$; $b = -6 + 2i$ et $c = 12i$
 Soit r la rotation de centre A et qui transforme B en C.
- a) Montrer que : $\frac{c-a}{b-a} = -i$
 - b) Déduire que $-\frac{\pi}{2}$ est une mesure de l'angle de la rotation r , et déterminer la nature du triangle ABC.
 - c) Déterminer l'écriture complexe de la rotation r . (0.5pt)

Exercice 3

On pose pour tout entier $n \geq 1$: $I_n = \int_0^2 \frac{x^n}{\sqrt{x^2 + 4}} dx$

- 1- Calculer I_1
- 2- Montrer que pour tout entier $n \geq 3$; $I_n = \int_0^2 x^{n-2} \sqrt{x^2 + 4} dx - 4I_{n-2}$
- 3- a) En déduire, à l'aide d'une intégration par parties, que : $nI_n = 2^n \sqrt{2} - 4(n-1)I_{n-2}$ pour tout entier $n \geq 3$
 b) En déduire les valeurs de I_3 et I_5 .

Exercice 4

Partie 1

On considère la fonction g définie sur $]0; +\infty[$ par: $g(x) = \ln(x+1) - \ln x - \frac{1}{x+1} + 1$

1- Montrer que : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$.

2- Montrer que : $g'(x) = -\frac{1}{x(x+1)^2}$ pour tout $x \in]0; +\infty[$ et dresser le tableau de variation de g sur $]0; +\infty[$.

3- Dédurre que: $(\forall x \in]0; +\infty[); g(x) > 0$.

Partie 2

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x + 1 & ; \text{si } x > 0 \\ f(x) = (1-x)e^x & ; \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

On désigne par (C_f) la courbe de f dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$ (on donne $\|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = 2\text{cm}$)

a) Montrer que: $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = 1$ et déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (Remarquer que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1)$$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat..

c) Montrer que f est continue en 0.

2- Étudier la dérivabilité de f à droite et à gauche en 0 ; puis donner une interprétation graphique aux résultats obtenus.

3- a) Montrer que: $(\forall x \in]0; +\infty[);$ et que: $f'(x) = g(x)$; et que: $(\forall x \in]-\infty; 0[); f'(x) = -xe^x$

b) dresser le tableau de variations de f .

4- Montrer que (C_f) admet un point d'inflexion d'abscisse négative.

5- Montrer que la droite d'équation $(T): y = x + 2$ est une asymptote oblique à (C_f) au voisinage de $+\infty$.

6- Construire la courbe (C_f) et (T) . (On prend : $e^3 \approx 0,05$; $e^{-2} \approx 0,37$; $\ln 3 \approx 1,1$, 1 ; $\ln 2 \approx 0,7$

7- Calculer l'aire du domaine délimité par la courbe (C_f) et l'axe des abscisses et les droites d'équations : $x = -1$ et $x = 0$.

Partie 3

- 1- Montrer que la fonction h la restriction de f sur l'intervalle $]-\infty; 0]$; admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur un intervalle J que l'on déterminera.
- 2- Calculer $(h^{-1})' \left(\frac{3}{e^2} \right)$. (Remarquer que : $h(-2) = \frac{3}{e^2}$)
- 3- Construire $(C_{h^{-1}})$ la courbe de h^{-1} dans le repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$.