PROF : HADDAR **2SM (AB)**

DEVOIR Surveillé N2 en Mathématiques (2H) **23/11/2018**

Exercice1 (15,5 pts) :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{Arctan} x} - \dfrac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ f(x) = \sqrt[3]{x^3 + 3x} + x & si \quad x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1pt 1) a- Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

1pt b-Montrer que la droite (Δ) d'équation $y = 2x$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $+\infty$. 0,5pt

c- Déterminer la position relative de la courbe (C) et la droite (Δ) sur $[0, +\infty[$

1,5pt 2) a- En utilisant **le théorème des accroissements finis**, montrer que :

$$(\forall x < 0) \quad x < \operatorname{Arctan} x < \frac{x}{1 + x^2}$$

1pt b - En déduire que la fonction f est continue en 0

1,5pt 3) a- Soit $x \in]-\infty, 0[$.

En appliquant le théorème de **Rolle** à la fonction $\varphi : t \mapsto (x - \operatorname{Arctan} x)t^3 - x^3(t - \operatorname{Arctan} t)$ sur l'intervalle $[x, 0]$, montrer que :

$$(\exists c \in]x, 0[) \ : \quad \frac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} = \frac{1}{3(1 + c^2)}$$

0,5pt b- En déduire que : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \operatorname{Arctan} x}{x^3} = \dfrac{1}{3}$

2pt c- Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0 et interpréter géométriquement les résultats.

1pt 4) Montrer que : $(\forall x < 0) \quad : \ f'(x) = \dfrac{1}{x^2 \operatorname{Arctan}^2(x)} \left(\operatorname{Arctan}^2(x) - \dfrac{x^2}{1 + x^2} \right)$

1,5pt 5) a-Etudier les variations de la fonction g définie sur $]-\infty, 0[$ par :

$$g(x) = \arctan^2(x) - \frac{x^2}{1 + x^2}$$

1pt b- En déduire que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0[$

1,5pt 6) Montrer que f est strictement croissante sur $]0, +\infty[$ puis dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

1,5pt 7) Construire la courbe (C).

Exercice 2 (4,5 pts) :

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{x}{2}$

Et soit $(u_n)_{n \geq 0}$ la suite numérique définie par : $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = f(u_n)$; $n \in \mathbb{N}$

1 pt	1) *Montrer que* $(\forall x \in [1,2]) \quad : \left| f'(x) \right| \leq \frac{1}{2}$.
1pt	2) *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N}) : \ 1 \leq u_n \leq 2$
1pt	3) *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $\left| u_{n+1} - \sqrt{2} \right| \leq \frac{1}{2} \left| u_n - \sqrt{2} \right|$.
1,5pt	4) *En déduire que la suite* $(u_n)_{n \geq 0}$ *est convergente et déterminer sa limite.*