Examen Nat Sc Eco 2017 Session de rattrapage

Exercice 1(4,5 pts)

On considère la suite numérique (U_n) définie par :

$$\begin{cases} U_0 = 2 \\ U_{n+1} = \dfrac{3U_n + 2}{2U_n + 3} \quad (\forall n \in IN) \end{cases}$$

1- a) Calculer U_1 et U_2

b) Vérifier que : $U_{n+1} - 1 = \dfrac{U_n - 1}{2U_n + 3}$ puis montrer par récurrence que : $(\forall n \in IN) \quad U_n > 1$

c) Montrer que : $(\forall n \in IN) \quad U_{n+1} - U_n = 2\left(\dfrac{1 - U_n^2}{2U_n + 3}\right)$

d) Déduire que la suite (U_n) est décroissante et qu'elle est convergente

2- On considère la suite (V_n) définie par : $V_n = \dfrac{U_n - 1}{U_n + 1} \quad (\forall n \in IN)$

a) Vérifier que : $V_n \neq 1 \quad (\forall n \in IN)$.

b) Calculer son premier terme V_0 .

c) Montrer que la suite (V_n) est géométrique de raison $\dfrac{1}{5}$.

d) Ecrire V_n en fonction de n .

3- a) Montrer que : $U_n = \dfrac{1 + V_n}{1 - V_n} \quad (\forall n \in IN)$

b) En déduire que pour tout n dans IN : $U_n = \dfrac{1 + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}{1 - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^n}$

c) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

Exercice 2 : (4 pts) (Donner tous les résultats sous forme de fractions)

Un Sac contient trois[1] boules Blanches portants les numéros 0 ;1 ;2 , deux boules Noires portants les numéros [redacted];2 (indiscernables au toucher) .
On tire de façon aléatoire successivement et sans remise 2 boules du Sac .

1. On considère les deux événements :
A « Les deux boules tirées portent le numéros 1 ».
B « La première boule tirée est blanche »

a) Montrer que : $P(A) = \dfrac{1}{10}$

b) Calculer la probabilité de B et montrer que : $P(A \cap B) = \dfrac{1}{20}$.

c) Les événements A et B sont –ils indépendants ? justifier votre réponse .

2. Soit X la variable aléatoire liée au produit des numéros que portes les deux boules tirées.

a) Recopier puis compléter le tableau ci-dessous en justifiant vos réponses :

x_i	0	1	2	4
$P(X=x_i)$	$\frac{8}{20}$			

b) Calculer $E(X)$ l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

<u>Exercice 3 :</u> (1,5 pts)

On pose $I=\int_0^1 \frac{x}{x^2+1}\,dx$ et $J=\int_0^1 \frac{x^3}{x^2+1}\,dx$.

1- Calculer I.

2- Calculer $I+J$.

3- En déduire que : $J=\frac{1}{2}(1-\ln 2)$.

<u>Exercice 3 :</u> (10 pts)

On considère la fonction numérique f définie sur IR^* par :

$f(x)=\left(\frac{x-1}{x}\right)e^x$ et soit (C_f) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(o;\vec{i};\vec{j})$.

1- a) Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et montrer que : $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=+\infty$. Puis donner une interprétation à ce résultat.

b) Calculer $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ et donner une interprétation au résultat.

c) Montrer que : $\lim_{x\to0^-} f(x)=+\infty$ et $\lim_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ Puis donner une interprétation aux résultats.

2- a) Montrer que : $f'(x)=\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}\right)e^x \quad (\forall x\in IR^*)$.

b) Montrer que : $f'(x)>0 \quad (\forall x\in IR^*)$.

c) En déduire le sens de variation de f $]-\infty;0[$ sur et sur $]0;+\infty[$.

d) Calculer $f(1)$ et dresser le tableau de variation de f sur IR^*.

3. Dans la figure ci-dessous (C_f) est la courbe représentative de la fonction f dans le repère $(o;\vec{i};\vec{j})$.

a) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C_f) au point d'abscisse 1.

b) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=2$.

c) Déterminer graphiquement le nombre de solutions de l'équation : $f(x)=-2$.