Exercice

Partie :

On considère la fonction numérique g définie sur $]0;+\infty[$ par: $g(x)=2x\sqrt{x}-2+\ln x$.

1- a- Démontrer que $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $g'(x)=3\sqrt{x}+\frac{1}{x}$.

b-Déduire la monotonie de g sur l'intervalle 0, + co

2- Calculer $g(1)$, puis déduire que pour tout $x\in[1;+\infty[$; $g(x)\geq 0$.

Partie II:

On considère la fonction numérique f définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x)=\frac{\ln x}{\sqrt{x}}+1-x$

et soit C_f Sa courbe dans un repère orthonormé $(O;\vec{i};\vec{j})$.

1- a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$, puis interpréter géométriquement le résultat.

b- Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}}=0$ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2- a- Montrer que la droite (Δ) d'équation $y=-x+1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

b- Etudier la position relative de C_f et la droite (Δ).

3- a- Démontrer que : $(\forall x\in]0;+\infty[)$; $f'(x)=\frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$.

b- Calculer $f'(1)$, puis donner une interprétation géométrique du résultat.

c- Etudier les variations de f.

4- Construire la courbe C_f .

Partie III :

Soit (U_n) la suite numérique définie par : $\begin{cases} U_0=\frac{3}{2} \\ U_n=\frac{\ln(U_n)}{\sqrt{U_n}}+1 \quad (\forall n\in\mathbb{N}) \end{cases}$

1- Démontrer par récurrence que: $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_n\geq 1$.

2- Démontrer que $(\forall n\in\mathbb{N})$; $U_{n+1}=f(U_n)+U_n$ et déduire la monotonie de (U_n).

3-Déduireo que la suite (U_n) est convergente et déterminer sa limite.

Solution

Partie I:

1- a- On a :($(\forall x\in]0;+\infty[)$; $g'(x)=2\left(\sqrt{x}+\frac{x}{2\sqrt{x}}\right)+\frac{1}{x}$

$$= 2\sqrt{x} + \sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

$$= 3\sqrt{x} + \frac{1}{x}$$

b- Comme $x \in]0;+\infty[$ *alors* $3\sqrt{x} + \frac{1}{x} > 0$ *; d'où g est strictement croissante sur* $]0;+\infty[$.

2- On a : $g(1) = 2\times 1\times\sqrt{1} - 2 + \ln(1) = 0$ *et comme g est croissante sur* $]0;+\infty[$ *alors pour tout* $x \in [1;+\infty[$ *;* $g(x) \geq 0$.

Partie II :

1- a - On a: $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x\right)$

$$= \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\times\ln x + 1 - x\right) = -\infty \quad (\textit{Car : } \lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = +\infty \textit{ et } \lim_{x\to 0^+}\ln x = -\infty)$$

Interprétation géométrique :

la droite d'équation ($x = 0$ *)l'axe des ordonnées est une asymptote verticale à la courbe* C_f .

b- On a : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2\times\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0$ *(Car* $\lim\limits_{t\to+\infty}\frac{\ln t}{t} = 0$ *)*

Donc: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\times\ln x + 1 - x\right) = -\infty$

2- a- On a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - (-x+1)\right) = \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x - (-x+1)\right)$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right) = 0 \qquad (\textit{car } \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to+\infty} 2\times\frac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 0)$$

Donc la droite (Δ) *d'équation* $y = -x+1$ *est une asymptote oblique à* C_f *au voisinage de* $+\infty$.

b- On a: $\left(f(x) - (-x+1)\right) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$

Donc le signe de $f(x) - (-x+1)$ *est celui de* $\ln x$ *par conséquent:*

- *Si* $0 < x \leq 1$ *alors* $f(x) - (-x+1) \leq 0$

  D'où C_f *est au-dessous de la droite* (Δ) *sur* $]0;1]$.

- *Si* $x \geq 1$ *alors* $f(x) - (-x+1) \geq 0$

  D'où C_f *est au-dessus de la droite* (Δ) *sur* $[1;+\infty[$.

  C_f *coupe la droite* (Δ) *au point* $(1;0)$.

3- a- La fonction f est dérivable sur $]0;+\infty[$ *comme quotient et somme de fonctions dérivables.*

On a pour tout $x \in]0;+\infty[$ *:* $f'(x) = \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} + 1 - x\right)'$

$$= \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)' - 1$$

$$= \frac{\frac{1}{x}\times\sqrt{x} - \frac{1}{2\sqrt{x}}\times\ln x}{\left(\sqrt{x}\right)^2} - 1$$

$$= \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} - 1$$

$$= \frac{\frac{2-\ln x}{2\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}} - 1$$

$$= \frac{2-\ln x - 2x\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-\left(2x\sqrt{x} - 2 + \ln x\right)}{2x\sqrt{x}}$$

$$= \frac{-g(x)}{2x\sqrt{x}}$$

b- On a: $f'(1) = \dfrac{-g(1)}{2\times 1\times\sqrt{1}} = 0$

Donc la courbe C_f *admet une tangente horizontale au point* $(1;0)$.

c- Le signe de f' (x) est le signe contraire de $g(x)$ *et d'après la question 2 de la* ***patrie I***

On déduit que :

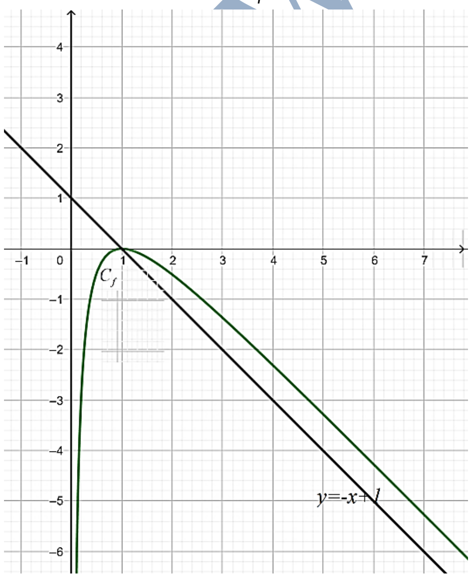
■ *pour tout* $x \in [1;+\infty[$; $f'(x) \leq 0$.

■ *pour tout* $x \in]0;1]$; $f'(x) \geq 0$.

D'où le tableau de variation de f:

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	||	$+$	0	$-$	
$f(x)$	|| $-\infty$	↗	0	↘	$-\infty$

4- Construction de C_f



Partie III :

1- Montrons par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \geq 1$; *Proposition* $P(n)$.

Initialisation

On a : $U_0 = \frac{3}{2}$ *; alors* $U_0 \geq 1$ *donc* $P(0)$ *est vraie.*

Hérédité

Supposons que $P(n)$ *est vraie càd :* $U_n \geq 1$ *et montrons que* $P(n+1)$ *est vraie càd :* $U_{n+1} \geq 1$

On a : $U_n \geq 1$ *donc* $\ln(U_n) \geq 0$ *; par suite* $\ln(U_n)+1 \geq 1$*Un D'où n*$U_{n+1} \geq 1$ *par conséquent* $P(n+1)$ *est vraie.*

Conclusion

On a montré par récurrence que: $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \geq 1$

2- On a pour tout $n \in \mathbb{N}$: $f(U_n) = \frac{\ln(U_n)}{\sqrt{U_n}} + 1 - U_n$

$$= U_{n+1} - U_n$$

càd pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$

Comme pour tout $x \in [1;+\infty[$; $f(x) \leq 0$ *et* $(\forall n \in \mathbb{N})$; $U_n \geq 1$ *alors* $U_{n+1} - U_n \leq 0$

D'où la suite (U_n) *est décroissante.*

3- La suite (U_n) *est décroissante et minorée par* 1 *donc elle est convergente.*

Soit $l = \lim\limits_{n\to+\infty} U_n$ *; on a :*

■ *f est continue sur l'intervalle* $[1;+\infty[$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}$: $U_{n+1} = f(U_n) + U_n$

Alors : $l = f(l) + l$ *; càd* $f(l) = 0$ *; par suite :* $l = 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1$