

I- La proposition- fonction propositionnelle

1- La Proposition:

Définition : n°1

On appelle **proposition** une phrase non ambiguë à laquelle on peut donner une valeur de vérité Vraie **V** ou Fausse **F**.

Remarques

Soit P une assertion, on affecte à P la **table de vérité** suivante :

Vraie	V ou 1
Fausse	F ou 0

A- Exemples

Exemple : n°1

- P : "L'addition de deux entiers naturels consécutifs est un nombre impair" est une proposition vraie on l'attribue V.
- P : " $1+3 < -2$ " est une proposition fausse on l'attribue F.

2- Fonction propositionnelle

Définition : n°2

Une fonction propositionnelle est une phrase mathématique dépendant d'une ou de plusieurs variables appartenant à un ensemble E, elle peut devenir une assertion si on substitue cette ou ces variables par des éléments de E.

selon le nombre de variable une fonction propositionnelle peut prendre les notations suivantes : $P(x; y)$; $Q(x)$; $R(x; y; z)$; ...

B - Exemples

Exemple : n°2

- $P(x)$: " $x \in \mathbb{Z}, x+3 \geq 0$ " est une fonction propositionnelle et $P(0)$ est une proposition vraie, $P(-6)$ est fausse.
- $Q(a; b)$: " $a^2 + b^2 = 4$ " , tel que $(a; b) \in \mathbb{R}^2$ est une fonction propositionnelle, $P(1; 0)$ est une assertion fausse et $P(0; 2)$ est une assertion vraie.

II - Les quantificateurs

Définition : n°3

Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle d'une variable x appartenant à un ensemble non vide E. À partir de la fonction propositionnelle: $(x \in E): P(x)$ ($x \in E): P(x)$, on définit les propositions suivantes:

- ♦ " $(\exists x \in E): P(x)$ " cette proposition est vraie si et seulement si il existe au moins un élément x de E qui vérifie $P(x)$.
- ♦ le symbole $\exists$ est appelé le quantificateur **existantiel** et on le lit " il existe au moins ".
- ♦ " $(\forall x \in E): P(x)$ " Cette proposition est vraie si et seulement si tout élément x de E vérifie $P(x)$.
- ♦ le symbole $\forall$ est appelé le quantificateur **universelle** et on le lit " pour tout élément ", " Quel que soit ".

C - Exemples

Exemple : n°3

On considère les propositions suivantes:

1. $(P_1): " \forall x \in \mathbb{R}, 2x+1=0 "$, est Fausse (si $x=0$ alors $2 \times 0 + 1 = 1 \neq 0$ est fausse).
2. $(P_2): " \exists x \in \mathbb{R}, 2x+1=0 "$, est Vraie (si $x = -\frac{1}{2}$ alors $2 \times -\frac{1}{2} + 1 = 0$ est vraie).
3. $(P_3): " (\exists x \in \mathbb{Z}), 2x+1=0 "$, est Fausse (si il existe x_0 vérifiant $2x_0+1=0$ alors $x_0 = -\frac{1}{2}$ or $-\frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$ donc P_3 est fausse).
4. $(P_4): " (\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x+y=1 "$, est Fausse (si $x=1$ et $y=2$ alors $2+1=3 \neq 1$ est fausse).
5. $(P_5): " (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x+y=1 "$, est Vraie (si $x \in \mathbb{R}$ et si on prend $y=1-x$ alors $x+(1-x)=1$ est Vraie).
6. $(P_6): " \exists (x; y) \in \mathbb{R}^2; x+y=1 "$, est Vraie (si $x=0$ et $y=1$ alors $0+1=1$ est Vraie).
7. $(P_7): " (\forall a \in \mathbb{R}^{*+}); a + \frac{1}{a} \geq 2 "$, est Vraie (si $x \in \mathbb{R}^{*+}$ on a : $a + \frac{1}{a} \geq 2$ équivaut à : $a^2 - 2a + 1 \geq 0$ alors $(a-1)^2 \geq 0$ est Vraie).

Remarques

- ♦ Si une proposition contient des quantificateurs de même nature **alors** l'ordre des quantificateurs n'est pas important.
- ♦ Si une proposition contient des quantificateurs différents **alors** l'ordre des quantificateurs est très important.

III- Les opérations sur les propositions

1- négation d'une assertion

Définition : n°4

Soit P une assertion, on définit sa négation notée $\bar{P}$ ou non(P) ou encore $\neg P$ à partir de sa table de vérité :

P	$\bar{P}$
V	F
F	V

Remarques

- ✧ La négation de la proposition " $(\forall x \in E); P(x)$ " est la proposition " $(\exists x \in E); \neg P(x)$ ".
- ✧ Pour montrer que la proposition " $(\forall x \in E); P(x)$ " est vraie on montre que sa négation " $(\exists x \in E); \neg P(x)$ " est fausse.

D - Exemples

Exemple : n°4

- ✧ La négation de la proposition $Q: "(\forall x \in E); P(x)"$ est la proposition $\bar{Q}: "(\exists x \in E); \neg P(x)"$.

- ✧ La négation de la proposition $R: "(\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R}); x + y \leq 0"$ est la proposition $\bar{R}: "(\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R}); x + y > 0"$.

- ✧ Pour montrer que $P: "(\forall (n; m) \in \mathbb{N}^2; \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m} \in \mathbb{N}^*)"$ est vraie on montre que sa négation $\bar{P}$ est fausse.

On a la négation de P est : $\bar{P}: "(\exists (n; m) \in \mathbb{N}^2; \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \dots + \frac{1}{n+m} \notin \mathbb{N}^*)"$:

Si on prend : $n=1$ et $m=2$ alors : $\frac{1}{1} + \frac{1}{1+1} + \frac{1}{1+2} = \frac{11}{6} \notin \mathbb{N}^*$ d'où la négation de P est vraie, on en déduit que P est fausse.

2- La disjonction de deux propositions

Définition : n°5

La disjonction de deux propositions P et Q est une proposition notée $P \vee Q$ ou $P \vee Q$ qui est fausse seulement si les deux propositions sont fausses :

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
F	F	F
V	F	V
F	V	V

E- Exemples

Exemple : n°5

- " $(\pi \in \mathbb{R}) \text{ ou } (\sqrt{16} = 2)$ " est une proposition vraie.
- " $(5 = 4) \text{ ou } (5 > 4)$ " est une proposition vraie
- " $(\sqrt{2+3} = \sqrt{2} + \sqrt{3}) \text{ ou } ((-3)^2 = -9)$ " est une proposition fausse.

Remarques

$(P \vee Q) = (Q \vee P)$ la disjonction est commutative.

$(P \vee (Q \vee R)) = (Q \vee P) \vee R$ la disjonction est associative.

3- La jonction de deux propositions

Définition : n°6

La jonction de deux propositions P et Q est une proposition notée $P \wedge Q$ ou $P \wedge Q$ qui est vraie seulement si les deux propositions sont vraies :

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
F	F	F
V	F	F
F	V	F

F - Exemples

Exemple : n°6

- " $(\pi \in \mathbb{R})$ et $(\sqrt{\sqrt{16}} = 2)$ " est une proposition vraie.
- " $(5 = 4)$ et $(5 > 4)$ " est une proposition fausse

Remarques

- $(P \wedge Q) = (Q \wedge P)$ la jonction est commutative.
- $(P \wedge (Q \wedge R)) = (Q \wedge P) \wedge R$ la jonction est associative.

4- L'implication

Définition : n°7

À partir de deux propositions P et Q on définit la proposition $\neg P$ ou Q qui est fausse dans le cas où P est vraie et Q est fausse. La proposition Q ou $\neg P$ est appelé l'implication de P et Q on écrit : $P \Rightarrow Q$ et on lit : " P implique Q ".

P	Q	$P \Rightarrow Q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	V

G - Exemples

Exemple : n°7

- $(\pi \in \mathbb{Q}) \Rightarrow (16 = 4)$ est une implication Vraie.
- $\sqrt{3} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (3 > 4)$ est une proposition Vraie.
- $(\vec{IA} + \vec{IB} = \vec{0}) \Rightarrow \mathbf{I}$ est le milieu du segment $[AB]$ est une proposition Vraie.
- $\sqrt{3} \notin \mathbb{IN} \Rightarrow (3 < 0)$ est une proposition Fausse.

Remarques

- L'implication $(P \Rightarrow Q)$ est équivalent à la proposition: $\neg P$ ou Q .
- L'implication $(P \Rightarrow Q)$ et $(Q \Rightarrow P)$ n'ont pas les mêmes valeurs de vérités.
- L'implication $(P \Rightarrow Q)$ et $(\bar{Q} \Rightarrow \bar{P})$ ont les mêmes valeurs de vérités.

5- Conditions nécessaires et suffisantes

On considère les propositions suivantes :

P : (ABCD est un carré) et Q : (ABCD est un parallélogramme)

. $(P \Rightarrow Q)$ est une implication vraie.

✧ Pour que Q soit vraie il suffit que P soit vraie (**Condition suffisante**). Dès que l'on sait que ABCD est un carré, on sait que ABCD est un parallélogramme.

✧ Pour que P soit vraie il faut que Q soit vraie (**Condition nécessaire**). Pour que ABCD soit un carré, nécessairement ABCD doit être d'abord un parallélogramme mais cette condition n'est pas suffisante pour déduire que ABCD est un carré alors il faut une autre condition.

6- L'équivalence de deux propositions

Définition : n°8

À partir de deux propositions P et Q on peut définir " $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$ " qui est donc vraie seulement dans le cas où P et Q ont les mêmes valeurs de vérité.

La proposition " $(P \Rightarrow Q \text{ et } Q \Rightarrow P)$ " est appelée l'équivalence de P et Q on écrit : $(P \Leftrightarrow Q)$ et on lit : " P équivaut à Q".

P	Q	$P \Leftrightarrow Q$
V	V	V
F	F	V
V	F	F
F	V	F

H- Exemples

Exemple : n°8

● La proposition $\left(|\sqrt{3}-1| = 1-\sqrt{3} \Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{2}} = -\sqrt{2}-1 \right)$ est Fausse.

● La proposition $\left(1 + (\sqrt{2})^2 = 3 \Leftrightarrow 21 = 3^2 \times 7 \right)$ est Vraie

● La proposition $\left(|\sqrt{3}-1| = \sqrt{3}-1 \Leftrightarrow \frac{1}{1-\sqrt{2}} = \sqrt{2} \right)$ est Fausse

● La proposition $\left((\exists \alpha \in \mathbb{Z}) / 2\alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow 2 \text{ est un nombre impair} \right)$ est Vraie

Remarques

● $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow P$ ont les mêmes valeurs de vérité, on dit que l'équivalence est **commutative**.

● $P \Leftrightarrow (Q \Leftrightarrow R)$ et $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow R$ ont les mêmes valeurs de vérité, on dit que l'équivalence est **associative**.

● Si $P \Leftrightarrow Q$ et $Q \Leftrightarrow R$ alors $P \Leftrightarrow R$, on dit que l'équivalence est **Transitive**.

I- Exemples

Exemple : n°9

montrons que : $\left(\forall (x; y) \in \mathbb{R}^2 \right); |x-1| < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}$.

$$\begin{aligned}
 \text{Soit } (x; y) \in \mathbb{R}^2, \text{ on a : } |x-1| < \frac{1}{2} &\Leftrightarrow -\frac{1}{2} < x-1 < \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow 2 - \frac{1}{2} < x+1 < 2 + \frac{1}{2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{3}{2} < x+1 < \frac{5}{2} \\
 &\Leftrightarrow \frac{2}{5} < \frac{1}{x+1} < \frac{2}{3}
 \end{aligned}$$

IV- Les lois logiques

Définition : n°9

P est une proposition composé de plusieurs propositions $Q_1; Q_2; \dots; Q_n$.

La proposition P est une loi logique si elle Vraie pour n'importe quelle valeur de vérité de $Q_1; Q_2; \dots; Q_n$.

J- Exemples

Exemple : n°10

À l'aide de la table suivante :

P	Q	$P \wedge Q$	$Q \wedge P$	$(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$
0	1	0	0	1
1	0	0	0	1
1	1	1	1	1
0	0	0	0	1

On dit que : $(P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$ est une **loi logique**. De la même manière on peut montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :

$$\diamond (P \wedge Q) \Leftrightarrow (Q \wedge P)$$

$$\diamond (P \wedge Q) \Rightarrow P$$

$$\diamond (P \Rightarrow (Q \vee R)) \Leftrightarrow ((P \wedge \bar{Q}) \Rightarrow R)$$

$$\diamond (P \wedge (Q \wedge R)) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \wedge R)$$

$$\diamond (P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee Q)$$

$$\diamond (P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P))$$

Remarque

Les lois logiques sont très utilisées comme raisonnement pour Démontrer qu'une proposition est vraie.

1- Loi de Morgan:(la négation d'une jonction-disjonction)

Propriété n°1

P et Q sont deux propositions.

Les propositions suivantes sont des lois logiques:

$$\bullet (\overline{P \vee Q}) \Leftrightarrow (\bar{P} \wedge \bar{Q})$$

$$\bullet (\overline{P \wedge Q}) \Leftrightarrow (\bar{P} \vee \bar{Q})$$

K- Exemples

Exemple : n°11

Déterminons la négation de : $(P \Rightarrow Q)$

$$\begin{aligned}\text{On a : } (\overline{P \Rightarrow Q}) &\Leftrightarrow (\overline{\overline{P} \vee Q}) \\ &\Leftrightarrow \overline{\overline{P}} \wedge \overline{Q} \\ &\Leftrightarrow P \wedge \overline{Q}\end{aligned}$$

d'où la négation de la proposition $(P \Rightarrow Q)$ est la proposition: $P \wedge \overline{Q}$

2- Loi de contraposé: (Raisonnement par contraposé)

Propriété n°2

P et Q sont deux propositions, la proposition suivante est une loi logique : $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow (\overline{Q} \Rightarrow \overline{P})$

L- Exemples

Exemple : n°12

a et b sont deux nombres réels non opposés, Montrons que : $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$.

Pour cela on utilise la méthode de contraposée cela revient à démontrer que $\frac{a-b}{a+b} = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}b$

$$\begin{aligned}\text{On a : } \frac{a-b}{a+b} = -3 &\Rightarrow a-b = -3 \times (a+b) \\ &\Rightarrow a-b = -3a-3b \\ &\Rightarrow a+3a = b-3b \\ &\Rightarrow 4a = -2b \\ &\Rightarrow a = -\frac{1}{2}b\end{aligned}$$

d'où : $\frac{a-b}{a+b} = -3 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}b$; par suite : $a \neq -\frac{1}{2}b \Rightarrow \frac{a-b}{a+b} \neq -3$

3- Loi de l'absurde: (Raisonnement par l'absurde)

Propriété n°3

P et Q sont deux propositions, la proposition suivante est une loi logique $((\overline{P} \Rightarrow Q) \text{ et } (\overline{P} \Rightarrow \overline{P})) \Rightarrow P$

Remarques

Pour montrer qu'une proposition est vraie on montre que sa négation est fausse. (Une proposition ne peut pas être à la fois vraie et fausse)

M- Exemples

Exemple : n°13

Montrons que : $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ est une proposition vraie.

sa négation est forcément fausse, si on suppose que sa négation est vraie alors :

$$\sqrt{2} \in \mathbb{Q} \Rightarrow (\exists p \in \mathbb{Z} \text{ et } \exists q \in \mathbb{N}^*) / \sqrt{2} = \frac{p}{q}, \text{ tel que: } p \text{ et } q \text{ sont premiers entre eux}$$

$$\Rightarrow 2 = \frac{p^2}{q^2}$$

$$\Rightarrow p^2 = 2q^2$$

Puisque $q \in \mathbb{N}^*$ alors p^2 est un nombre pair d'où p est un nombre pair, d'après l'arithmétique dans $\mathbb{N}$ (c'est à dire $p = 2k / k \in \mathbb{Z}$).

$$q^2 = \frac{p^2}{2} \Rightarrow q^2 = \frac{(2k)^2}{2}$$

$$\Rightarrow q^2 = 2k^2$$

$$\Rightarrow q^2 = 2k' / (k' = k^2 \in \mathbb{Z})$$

d'où q^2 est un nombre pair, on en déduit que : q est un nombre pair.

Par conséquent, il est possible de simplifier la fraction par 2, ce qui contredit l'hypothèse que p et q sont premiers entre eux.

Puisque l'hypothèse $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ conduit à une contradiction, on en déduit qu'elle est fausse donc :

$$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$$

4- Raisonnement par disjonction des cas :

Propriété n°4

P et Q sont deux propositions, la proposition suivante est une loi logique
 $((P \Rightarrow R) \text{ et } (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow ((P \text{ ou } Q) \Rightarrow R)$

N- Exemples

Exemple : n°14

Réolvons l'équation suivante : $|x-1| + |x+2| = 3$

Pour cela on utilise le tableau de signe :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$x-1$	$-x+1$	$-x+1$	0	$x-1$
$x+2$	$-x-2$	0	$x+2$	$x+2$
$ x-1 + x+2 = 3$	$-2x-1=3$	$3=3$	$2x+1=3$	

alors d'après le tableau, on va résoudre l'équation sur les intervalles :

$I_1 =]-\infty; -2]$ puis $I_2 = [-2; 1]$ et sur $I_3 = [1; +\infty[$ on note S_i l'ensemble des solutions de l'équation sur les intervalles I_i où $i \in \{1; 2; 3\}$

● **Cas où :** $x \in I_1$

$$x \in S_1 \Leftrightarrow -2x-1=3$$

$$\Leftrightarrow -2x=4$$

$$\Leftrightarrow x=-2$$

Puisque $-2 \in I_1$ alors $S_1 = \{-2\}$

● **Cas où :** $x \in I_2$

$$x \in S_2 \Leftrightarrow 3=3$$

alors $S_2 = \mathbb{R} \cap I_2$ d'où $S_2 = [-2;1]$

● **Cas où :** $x \in I_3$

$$x \in S_3 \Leftrightarrow 2x+1=3$$

$$\Leftrightarrow 2x=2$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Puisque $1 \in I_3$ alors $S_3 = \{1\}$

Les solutions de cette équation sont : $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ donc $S = [-2;1]$. Dans ce cas on a utilisé le raisonnement par disjonction des cas pour résoudre l'équation.

Exercice d'application

Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}); \frac{n(n+1)}{2} \in \mathbb{N}$

5- Raisonnement par récurrence

Propriété n°5

$P(n)$ est une fonction proportionnelle de variable $n \in \mathbb{N}$.

Si $\begin{cases} (\exists n_0 \in \mathbb{N}); P(n_0) \text{ est Vraie} \\ (\forall n \geq n_0); P(n) \Rightarrow P(n+1) \text{ est Vraie} \end{cases}$

alors: $(\forall n \geq n_0); P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est une proposition Vraie.

0- Exemples

Exemple : n°15

Montrons que : $(\forall n \in \mathbb{N}^*); (a+1)^n \geq 1+an$.

● Pour $n=1$ la proposition $(a+1)^1 \geq 1+a \times 1$ est vraie où a est un réel positif.

● soit $n \in \mathbb{N}$ On suppose que : $(a+1)^n \geq 1+an$ est vraie et on montre que : $(a+1)^{n+1} \geq 1+a(n+1)$ est vraie.

$$\begin{aligned} \text{On a : } (a+1)^n \geq 1+an &\Rightarrow (a+1)(a+1)^n \geq (a+1)(1+an) \\ &\Rightarrow (a+1)^{n+1} \geq a+a^2n+1+an \\ &\Rightarrow (a+1)^{n+1} \geq 1+a(n+1)+a^2n \end{aligned}$$

Comme $a^2n \geq 0$ alors $(a+1)^{n+1} \geq 1+a(n+1)$

Puisque $P(n+1)$ est vraie alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, par conséquent :

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*); (a+1)^n \geq 1+an$$