

Exercice 1 (6 pts) :

Soit f la fonction définie sur $[0, \pi]$ par : $f(x) = 1 + \cos x$

1 pt

1) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur $[0, 2]$.

1pt

2) a- Justifier que : $(\forall x \in [0, 2]) : \cos(f^{-1}(x)) = x - 1$

0,5pt

b-Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0, 2[$

1pt

c-En déduire que $(\forall x \in]0, 2[) : (f^{-1})'(x) = \frac{-1}{\sqrt{2x - x^2}}$

1pt

3) a-Montrer que : $(\forall x \in]0, 2]) : f^{-1}(x) = 2 \arctan\left(\sqrt{\frac{2}{x} - 1}\right)$

1,5pt

b-Retrouver les résultats des questions (2-b) et (2-c)

Exercice 2 (14 pts) :

Soit f la fonction définie sur $]-\infty, 1]$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \frac{\arctan \sqrt{1-x}}{\sqrt{1-x}} & \text{si } x < 1 \\ f(1) = 1 \end{cases}$$

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$

1,5pt

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ et interpréter géométriquement le résultat.

1,5pt

2) Montrer que f est continue à gauche en 1.

3) Pour tout $t \in]0, 1[$, on pose : $u(t) = t - \arctan t$ et $v(t) = t^3$

1pt

a-Vérifier que $\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{u(t)}{v(t)}$

b- Pour $t \in]0, 1[$, on considère la fonction φ_t définie sur $[0, t]$ par :

$$\varphi_t(x) = u(t)v(x) - u(x)v(t)$$

1,5pt

En utilisant le **théorème de Rolle**, montrer que : $(\exists c \in]0, t[) : \varphi_t'(c) = 0$

1,5pt

c- En déduire que f est dérivable à gauche en 1 et interpréter géométriquement le résultat.

2pts

4) a-Montrer que f est dérivable sur $]-\infty, 1[$ et que :

$$(\forall x \in]-\infty, 1[) : f'(x) = \frac{1}{2(1-x)^{\frac{3}{2}}} \left(\arctan \sqrt{1-x} - \frac{\sqrt{1-x}}{1 + \sqrt{1-x}^2} \right)$$

1,5pt

b- En utilisant le **théorème des accroissements finis**, montrer que :

$$(\forall t \in [0, +\infty[) : \arctan t - \frac{t}{1+t^2} \geq 0$$

1,5pt

c- En déduire le tableau de variation de f .

0,5pt

5) Donner l'équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

1,5pt

6) Construire la courbe (C).