

Exercice 1

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $H(x) = \int_x^{3x} \frac{\cos t}{t} dt$

1) a) Etudier la parité de H .

b) Déterminer le signe de $H\left(\frac{\pi}{6}\right)$ et $H\left(\frac{\pi}{2}\right)$

2) a) Montrer que : $(\forall x \in]0; +\infty[); |H(x)| \leq \ln 3$

b) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$; $\ln 3 - H(x) = 2 \int_x^{3x} \frac{\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)}{t} dt$

E) En utilisant le théorème des accroissements finis ; montrer que : $(\forall x \in \mathbb{R}^*) ; |\sin x| \leq |x|$

3) a) Montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$; $0 \leq \ln 3 - H(x) \leq 2x^2$

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de H à droite en zéro.

4) a) En utilisant une intégration par parties ; montrer que pour tout $x \in]0; +\infty[$:

$$H(x) = \frac{\sin(3x) - \sin x}{3x} + \int_x^{3x} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$$

b) Dédurre que : $(\forall x \in]0; +\infty[); |H(x)| \leq \frac{2}{x}$; puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} H(x)$

c) Montrer que H est dérivable sur $]0; +\infty[$; puis calculer $H'(x)$ pour tout $x > 0$.

d) Résoudre dans $]0; +\infty[$; l'équation $H'(x) = 0$

Exercice 2

I. Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \ln(x - 1 + \sqrt{x^2 - 2x + 2})$

1) Montrer que le point $I(1;0)$ est un centre de symétrie pour la courbe de g .

2) a) Dresser le tableau de variations de g sur $[1; +\infty[$.

b) Déterminer le branche infinie de (C_g) en $+\infty$

c) Construire (C_g) dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}; \vec{j})$

3) a) Calculer l'aire de la partie du plan délimité par (C_g) ; l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

b) Calculer la limite de la suite (U_n) défini par :

$$U_n = \sum_{k=1}^n \frac{\ln\left(k - n + \sqrt{(k - n)^2 + n^2}\right) - \ln(n)}{n} ; (\forall n \in \mathbb{N}^*)$$

II. On considère les deux fonctions f et F définies sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 2}$ et

$$F(x) = \int_x^{x+2} f(t) dt$$

1) En utilisant le changement de variable $u = 2 - t$; montrer que F est paire

2) a) Montrer que : $(\forall t \in]1; +\infty[); t - 1 < f(t) < t - 1 + \frac{1}{t}$

b) Dédurre un encadrement de $F(x)$ pour $x > 1$; puis calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$

3) a) Montrer que F est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

b) Dresser le tableau de variations de F sur $\mathbb{R}$.

4) a) En utilisant une intégration par parties ; montrer que :

$$F(x) = \left[(t-1)\sqrt{t^2 - 2t + 2} \right]_x^{x+2} - \int_x^{x+2} \frac{(t-1)^2}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}} dt$$

b) Dédurre que : $2F(x) = \left[(t-1)\sqrt{t^2 - 2t + 2} \right]_x^{x+2} + \int_x^{x+2} \frac{1}{\sqrt{t^2 - 2t + 2}} dt$

c) Exprimer $F(x)$ en fonction de x .